KONU ANLATIMLI SORU ÇÖZÜMLERİ

Tam Kare Sayıların ve Tam Kare Olmayan Sayıların Karekökleri

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 — Asal çarpanlara ayırma ve tam kare yapma

a) **√1225** değerini asal çarpanlara ayırarak bulunuz.
b) **√576** değerini asal çarpanlara ayırarak bulunuz.
c) 3 sayısının tam kare olması için eklenmesi gereken **en küçük pozitif tam sayıyı** bulunuz.
d) 72 sayısının tam kare olması için çıkarılması gereken **en küçük pozitif tam sayıyı** bulunuz.

1 a) 1225'i asal çarpanlarına ayır

1225 sayısının son rakamı 5 olduğu için 5'e bölünür:

1225 : 5 = **245**

245 : 5 = **49**

49 : 7 = **7**

7 : 7 = **1**

1225 = 5 · 5 · 7 · 7

Aynı çarpanları **ikişerli** gruplayalım:

(5 · 5) · (7 · 7)

Her gruptan **birer tane** alıp çarpalım:

√1225 = 5 · 7 = **35**

Kontrol: 35 · 35 = 1225 ✓

2 b) 576'yı asal çarpanlarına ayır

576 çift olduğu için sürekli 2'ye bölelim:

576 : 2 = 288 · 288 : 2 = 144 · 144 : 2 = 72

72 : 2 = 36 · 36 : 2 = 18 · 18 : 2 = 9

9 : 3 = 3 · 3 : 3 = 1

576 = 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 3 · 3

İkişerli gruplayalım:

(2 · 2) · (2 · 2) · (2 · 2) · (3 · 3)

Her gruptan birer tane:

√576 = 2 · 2 · 2 · 3 = **24**

Kontrol: 24 · 24 = 576 ✓

Kısa yol: 576 = $2^6 \cdot 3^2$ yazılırsa üsler ikiye bölünür: $2^3 \cdot 3^1 = 8 \cdot 3 = 24$ ✓

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 **Asal çarpanlara ayırma ve tam kare yapma** (devam)

3 **c) 3'e eklenecek en küçük sayı**

3'ten **büyük** olan ilk tam kare sayıyı bulmalıyız.

Tam kareler: 1, **4**, 9, 16, 25 ...

3'ten büyük olan ilk tam kare: **4**

Eklenmesi gereken sayı = 4 − 3 = **1**

Kontrol: 3 + 1 = 4 = 2^2 ✓

Neden 9 değil? 3 + 6 = 9 da tam kare yapardı, ama soru **en küçük** sayıyı istiyor. 1 < 6 olduğundan cevap 1'dir.

4 **d) 72'den çıkarılacak en küçük sayı**

Bu kez 72'den **küçük** olan ilk tam kare sayıyı bulmalıyız. Çıkarma işlemi sayıyı küçülteceği için **aşağıya** bakıyoruz.

72'ye yakın tam kareler: **64** (8^2) ve 81 (9^2)

72'den küçük olan en büyük tam kare: **64**

Çıkarılması gereken sayı = 72 − 64 = **8**

Kontrol: 72 − 8 = 64 = 8^2 ✓

Dikkat: (c) ile (d) şıklarındaki yön farkına dikkat et.

- **Eklenecek** sayı sorulduğunda → bir **üstteki** tam kareye bakılır.
- **Çıkarılacak** sayı sorulduğunda → bir **alttaki** tam kareye bakılır.

Sonuç: a) 35 b) 24 c) 1 d) 8

Dikkat: Asal çarpanlara ayırdıktan sonra çarpanları İKİŞERLİ grupla; her gruptan bir tane alıp çarpmak karekökü verir.

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Kareköklü ifadelerle işlemler**

a) $\sqrt{49} + \sqrt{144} - \sqrt{25}$
b) $\sqrt{9} \cdot (\sqrt{400} - \sqrt{225})$
c) $\sqrt{(2^{20})}$
d) $\sqrt{(3^8)} \cdot \sqrt{(3^2)}$

1 **a) Her karekökü ayrı hesapla**

Önce her kareköğün değerini bulalım:

$\sqrt{49}$ = **7** · $\sqrt{144}$ = **12** · $\sqrt{25}$ = **5**

Şimdi işlemi yapalım:

7 + 12 − 5

= 19 − 5

= **14**

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Kareköklü ifadelerle işlemler** (devam)

Uyarı: Bu ifadeyi √(49 + 144 − 25) = √168 diye hesaplamak **yanlıştır**. Karekök toplama ve çıkarma üzerine dağılmaz. (√168 ≈ 12,96 çıkar; 14 değil.)

2 b) Önce parantez içi

İşlem sırasına göre önce **parantez içi** hesaplanır.

Parantez içindeki kareköker:

√400 = **20** · √225 = **15**

Parantez içi = 20 − 15 = **5**

Parantez dışındaki karekök:

√9 = **3**

Şimdi çarpalım:

3 · 5 = **15**

3 c) Üslü ifadenin karekökü

√(2^{20}) ifadesinde üs **20, yani çift** olduğu için üssü ikiye bölebiliriz:

√(2^{20}) = $2^{20:2}$ = **2^{10}**

Değerini hesaplayalım:

2^{10} = 2^5 · 2^5 = 32 · 32 = **1024**

Neden bu kural çalışıyor? 2^{20} demek, 20 tane 2'nin çarpımı demektir. Bunları ikişerli gruplarsak **10 grup** oluşur ve her gruptan bir tane alırız: 2^{10} ✓

4 d) İki kareköğü ayrı ayrı al

√(3^8) · √(3^2)

Her kareköğü ayrı hesaplayalım:

√(3^8) = $3^{8:2}$ = **3^4**

√(3^2) = $3^{2:2}$ = **3^1 = 3**

Şimdi çarpalım. Tabanlar aynı olduğu için üsler toplanır:

3^4 · 3^1 = 3^{4+1} = **3^5**

Değeri: 3^5 = 3 · 3 · 3 · 3 · 3 = **243**

İkinci yol: Çarpma karekökün içine alınabilir:

√(3^8) · √(3^2) = √(3^8 · 3^2) = √(3^{10}) = 3^5 = **243** ✓

Aynı sonuç. **Karekök çarpma üzerine dağılır** ama toplama üzerine dağılmaz — bu ikisini karıştırmamak gerekir.

Sonuç: a) 14 b) 15 c) 2^{10} = 1024 d) 3^5 = 243

Dikkat: √a + √b ile √(a+b) farklıdır; ama √a · √b = √(a·b) doğrudur. Karekök yalnız ÇARPMA üzerine dağılır.

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Alandan kenara geçiş ve geometri**

Kare biçimindeki bir bahçenin alanı **289** m^2, bu bahçenin yanındaki kare biçimindeki havuzun alanı ise **121** m^2'dir. İki karenin birer kenarı doğrusaldır ve yan yana durmaktadırlar.
a) Bahçenin ve havuzun **birer kenar uzunluğunu** bulunuz.
b) Bahçenin **çevre uzunluğunu** bulunuz.
c) İki karenin doğrusal kenarları boyunca oluşan toplam uzunluğu bulunuz.
d) Bahçenin çevresine metresi **75** TL olan çit çekilecekse maliyet kaç TL'dir?

1 **a) Alandan kenara geç**

Bir karenin alanı, kenar uzunluğunun karesidir. Kenarı bulmak için **alanın karekökünü** alırız.

Bahçe:

Alan = 289 m^2

Kenar = $\sqrt{289}$

289 = 17 · 17 olduğundan **Kenar = 17 m**

Havuz:

Alan = 121 m^2

Kenar = $\sqrt{121}$

121 = 11 · 11 olduğundan **Kenar = 11 m**

2 **b) Bahçenin çevresi**

Karenin çevresi, dört kenarın toplamıdır:

Çevre = 4 · Kenar

Çevre = 4 · 17 = **68 m**

Sık yapılan hata: Alanın karekökünü alıp doğrudan "çevre 17 m" demek. $\sqrt{289} = 17$ bize **bir kenarı** verir; çevre için bunu **4 ile çarpmak** gerekir.

3 **c) Doğrusal kenarlar boyunca toplam uzunluk**

İki karenin birer kenarı doğrusal olduğuna göre bu kenarlar aynı doğru üzerinde **uç uca** durmaktadır.

Toplam uzunluk = Bahçenin kenarı + Havuzun kenarı

= 17 + 11 = **28 m**

Not: Eğer havuz bahçenin **içinde** olsaydı ve uzunluk farkı sorulsaydı cevap 17 − 11 = 6 m olurdu. Şeklin nasıl yerleştiğine dikkat etmek gerekir: **yan yana ise toplanır, iç içe ise çıkarılır**.

4 **d) Çit maliyeti**

Çit, bahçenin **çevresi** boyunca çekilecektir. (b) şıkkında çevreyi **68 m** bulmuştuk.

Maliyet = Çevre × Metre fiyatı

= 68 × 75

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Alandan kenara geçiş ve geometri** (devam)

Hesaplayalım:

$68 \times 75 = 68 \times 70 + 68 \times 5$

$= 4760 + 340$

$=$ **5100 TL**

Kontrol: $68 \times 75 = 68 \times 100 : 4 \times 3 = 6800 : 4 \times 3 = 1700 \times 3 = 5100$ ✓

Çözümün özeti: Alan (289 m²) → karekök → kenar (17 m) → dört katı → çevre (68 m) → metre fiyatıyla çarp → maliyet (5100 TL). Karekök, bu zincirin **ilk halkasıdır**.

Sonuç: a) Bahçe 17 m, havuz 11 m b) 68 m c) 28 m d) 5100 TL

Dikkat: Karekök sana KENARI verir; çevre için 4 ile çarpmayı, alan için tekrar kare almayı unutma.

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Tam kare olmayan sayıların kareköklerı**

a) **√55** sayısı hangi ardışık iki tam sayı arasındadır?
b) √55 sayısı bu tam sayılardan **hangisine daha yakındır**?
c) **√55** ile **√200** arasında kaç tane tam sayı vardır?
d) Alanı **130** cm² olan kare biçimindeki bir kâğıdın bir kenar uzunluğu yaklaşık kaç santimetredir?

1 **a) Komşu tam kareleri bul**

55'ten **önceki** ilk tam kare sayıyı arayalım:

$49 = 7^2$ ✓ (55'ten küçük en büyük tam kare)

55'ten **sonraki** ilk tam kare sayı:

$64 = 8^2$ ✓

Eşitsizliği yazalım:

$49 < 55 < 64$

Her tarafın kareköknü alalım:

$\sqrt{49} < \sqrt{55} < \sqrt{64}$

$\mathbf{7 < \sqrt{55} < 8}$

√55 sayısı **7 ile 8** arasındadır.

2 **b) Hangisine daha yakın?**

Uzaklıkları **kareköknün içindeki sayı** üzerinden ölçeriz:

55'in 49'a uzaklığı: 55 − 49 = **6 birim**

55'in 64'e uzaklığı: 64 − 55 = **9 birim**

6 < 9 olduğundan 55, **49'a daha yakındır**.

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Tam kare olmayan sayıların karekökleri** (devam)

Öyleyse √55 sayısı da **7'ye daha yakındır**.

Bu, √55 sayısının 7 ile 8 arasındaki orta nokta olan **7,5'ten küçük** olduğu anlamına gelir.

(Gerçek değeri √55 ≈ 7,42'dir ✓)

3 **c) İki karekök arasındaki tam sayılar**

Önce √200'ün hangi tam sayılar arasında olduğunu bulalım:

196 < 200 < 225 → **14 < √200 < 15**

Şimdi elimizde:

7 < √55 < 8 ve 14 < √200 < 15

Yani √55, 7'den büyüktür ve √200, 15'ten küçüktür. Aradaki tam sayılar:

8, 9, 10, 11, 12, 13, 14

Saydığımızda **7 tane** tam sayı vardır.

İkinci yöntem — içerideki tam kareleri saymak:

55 ile 200 arasındaki tam kareler: 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196

Karekökleri: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 → **7 tane** ✓

İki yöntem de aynı sonucu verdi.

4 **d) Alanı 130 cm² olan karenin kenarı**

Karenin bir kenarı = √130 cm'dir.

Komşu tam kareleri bulalım:

130'dan önceki ilk tam kare: **121** (11^2)

130'dan sonraki ilk tam kare: **144** (12^2)

121 < 130 < 144

√121 < √130 < √144

11 < √130 < 12

Hangisine daha yakın?

130'un 121'e uzaklığı: 130 − 121 = **9 birim**

130'un 144'e uzaklığı: 144 − 130 = **14 birim**

9 < 14 olduğundan **121'e daha yakındır**.

Sonuç: Kenar uzunluğu 11 cm ile 12 cm arasındadır ve **11 cm'ye daha yakındır**; yani yaklaşık **11 cm**'dir.

(Gerçek değeri √130 ≈ 11,40 cm'dir ✓)

Pratik kontrol: 11 · 11 = 121 < 130 ve 12 · 12 = 144 > 130 ✓ Tahminimiz doğru aralıkta.

Sonuç: a) 7 ile 8 arasında b) 7'ye daha yakın c) 7 tane (8, 9, 10, 11, 12, 13, 14) d) Yaklaşık 11 cm

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Tam kare olmayan sayıların karekökleri** (devam)

Dikkat: Uzaklıkları karekökün İÇİNDEKİ sayı üzerinden ölç; 55 − 49 ile 64 − 55 karşılaştırılır.