ÇÖZÜMLER

Kareköklü İfadelerin Farklı Gösterimleri, Çarpma ve Bölme İşlemleri

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

1. Bölüm Soru 1–5

1 Aşağıdaki kareköklü ifadeleri a√b biçiminde en sade hâliyle yazınız.

a) √98
b) √162
c) √250
d) Bu üç sayıyı büyükten küçüğe sıralayınız.

a) √98
98 sayısının tam kare çarpanını arayalım: 98 = **49** · 2
√98 = √(49 · 2) = **7√2**

b) √162
162 sayısının tam kare çarpanını arayalım: 162 = **81** · 2
√162 = √(81 · 2) = **9√2**

c) √250
250 = **25** · 10
√250 = √(25 · 10) = **5√10**

Kök içinde kalan 10 sayısının tam kare çarpanı yoktur (10 = 2 · 5), o hâlde ifade en sade hâlindedir.

d) Sıralama
Üç sayı zaten tek karekök biçiminde verilmişti. Kök içlerine bakmak yeterlidir:
250 > 162 > 98

O hâlde:
√250 > √162 > √98
yani
5√10 > 9√2 > 7√2

Dikkat: Sadeleştirilmiş hâllerine bakarak sıralama yapılsaydı, 9√2 ile 5√10 arasında karar vermek zor olurdu. Kök içine alarak kontrol edelim:
9√2 = √162 · 5√10 = √250 → 250 > 162 ✓

Bu yüzden sıralama sorularında ifadeleri **tek karekök** biçiminde tutmak en güvenli yoldur.

a) 7√2 b) 9√2 c) 5√10 d) 5√10 > 9√2 > 7√2

2 Aşağıdaki altı ifade veriliyor.

I. $\sqrt{50}$
II. $5\sqrt{2}$
III. $\sqrt{20}$
IV. $2\sqrt{5}$
V. $\sqrt{45}$
VI. $3\sqrt{5}$

a) Birbirine eşit olan ifadeleri aynı grupta olacak biçimde gruplayınız.
b) Her grubun ortak değerini $a\sqrt{b}$ biçiminde yazınız.
c) Grupları değerlerine göre küçükten büyüğe sıralayınız.

Önce tek karekök biçiminde olanları sadeleştirelim.

I. $\sqrt{50} = \sqrt{(25 \cdot 2)} = \mathbf{5\sqrt{2}}$
III. $\sqrt{20} = \sqrt{(4 \cdot 5)} = \mathbf{2\sqrt{5}}$
V. $\sqrt{45} = \sqrt{(9 \cdot 5)} = \mathbf{3\sqrt{5}}$

Şimdi altı ifadeyi yan yana koyalım:
I → $5\sqrt{2}$ · II → $5\sqrt{2}$ · III → $2\sqrt{5}$ · IV → $2\sqrt{5}$ · V → $3\sqrt{5}$ · VI → $3\sqrt{5}$

a) Gruplama
1. grup: I ve II
2. grup: III ve IV
3. grup: V ve VI

b) Grupların ortak değerleri
1. grup: **$5\sqrt{2}$**
2. grup: **$2\sqrt{5}$**
3. grup: **$3\sqrt{5}$**

c) Sıralama
Karşılaştırmak için hepsini kök içine alalım:
$5\sqrt{2} = \sqrt{50}$ · $2\sqrt{5} = \sqrt{20}$ · $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$

Kök içleri: $20 < 45 < 50$

Sıralama: **$2\sqrt{5} < 3\sqrt{5} < 5\sqrt{2}$**
yani **2. grup < 3. grup < 1. grup**

Not: 2. ve 3. grubun kök içleri aynı (5) olduğu için bu ikisi katsayılara bakılarak da sıralanabilirdi: $2 < 3$. Ama 1. grubun kök içi farklı olduğu için onu karşılaştırmak ancak kök içine alarak mümkündür.

a) {I, II}, {III, IV}, {V, VI} b) $5\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{5}$ c) $2\sqrt{5} < 3\sqrt{5} < 5\sqrt{2}$

3 Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını en sade hâliyle bulunuz.

a) $2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{8}$
b) $15\sqrt{48} : 5\sqrt{3}$
c) $(\sqrt{18} \cdot \sqrt{8}) : \sqrt{4}$
d) Bulduğunuz üç sonucu küçükten büyüğe sıralayınız.

a) $2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{8}$
Katsayılar ve kök içleri ayrı ayrı çarpılır:
$(2 \cdot 3)\sqrt{(6 \cdot 8)} = 6\sqrt{48}$

Kök içinde tam kare çarpan var: $48 = 16 \cdot 3$
$\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$6\sqrt{48} = 6 \cdot 4\sqrt{3} =$ **$24\sqrt{3}$**

b) $15\sqrt{48} : 5\sqrt{3}$
Katsayılar ve kök içleri ayrı ayrı bölünür:
$(15 : 5)\sqrt{(48 : 3)} = 3\sqrt{16}$

$\sqrt{16} = 4$ olduğuna göre:
$3 \cdot 4 =$ **12**

c) $(\sqrt{18} \cdot \sqrt{8}) : \sqrt{4}$
Önce parantez içindeki çarpma yapılır:
$\sqrt{18} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{144} =$ **12**

Sonra bölme:
$\sqrt{4} = 2$
$12 : 2 =$ **6**

Burada dikkat çekici olan şudur: 18 ile 8 sayılarının hiçbiri tam kare değildi, ama çarpımları (144) tam kare çıktı. Bu yüzden sonuç bir doğal sayı oldu.

d) Sıralama
Bulduğumuz değerler: **$24\sqrt{3}$**, **12** ve **6**

$24\sqrt{3}$ sayısını karşılaştırabilmek için yaklaşık değerini bulalım ya da kök içine alalım:
$24\sqrt{3} = \sqrt{(576 \cdot 3)} = \sqrt{1728}$
$12 = \sqrt{144} \cdot 6 = \sqrt{36}$

Kök içleri: $36 < 144 < 1728$

Sıralama: **$6 < 12 < 24\sqrt{3}$**
yani **$c < b < a$**

a) $24\sqrt{3}$ b) 12 c) 6 d) $c < b < a$

4 Mert, **3√50** ifadesini sadeleştirirken aşağıdaki çözümü yapmıştır.

3√50
= 3√(25 · 2)
= 3 · 25√2
= 75√2

a) Mert hangi adımda hata yapmıştır? Hatayı açıklayınız.
b) İfadenin doğru sadeleştirilmiş hâlini adım adım yazınız.
c) Mert'in bulduğu sonuç ile doğru sonuç arasındaki fark kaçtır?
d) Bu hatayı yapmamak için akılda tutulması gereken kuralı bir cümleyle yazınız.

a) Hata nerede?
Mert **üçüncü satırda** hata yapmıştır. Tam kare çarpan olan 25 sayısını kök dışına **olduğu gibi** çıkarmıştır.

Oysa bir çarpan kök dışına çıkarken **karekökü alınarak** çıkar. Kök dışına çıkması gereken sayı 25 değil, **√25 = 5**'tir.

Mert'in mantığı doğru olsaydı √25 ifadesinin değeri 25 olurdu; oysa √25 = 5'tir.

b) Doğru çözüm
3√50
= 3√(25 · 2) (50 sayısı tam kare çarpanına ayrıldı)
= 3 · **5**√2 (√25 = 5 olduğu için 5 dışarı çıktı)
= **15√2**

Kontrol: 15√2 = √(225 · 2) = √450
3√50 = √(9 · 50) = √450 ✓ İki ifade eşit.

c) Fark
Mert'in sonucu: 75√2
Doğru sonuç: 15√2

Kök içleri aynı olduğu için katsayılar çıkarılabilir:
75√2 − 15√2 = **60√2**

Yaklaşık olarak: 60 · 1,41 ≈ **84,6** kadarlık bir fark. Mert'in cevabı doğru cevabın **5 katıdır**.

d) Akılda tutulacak kural
"Kök içindeki tam kare çarpan, kök dışına **karekökü alınarak** çıkar; sayının kendisi olarak değil."

Kısa kontrol yöntemi: Sonucu tekrar kök içine alıp başlangıçtaki ifadeyle karşılaştır. Mert bunu yapsaydı 75√2 = √11 250 bulurdu ve bunun √450 ile eşit olmadığını hemen görürdü.

b) 15√2 · c) Fark 60√2 · Tam kare çarpan karekökü alınarak çıkar

5 Bir öğrenci, "**4√5** ile **5√4** sayıları aynı rakamları kullandığına göre birbirine eşittir." demektedir.

a) Her iki sayıyı da tek bir karekök biçiminde yazınız.
b) Öğrenci haklı mıdır? Gerekçesiyle açıklayınız.
c) Hangisi büyüktür?
d) a√b ile b√a ifadeleri genel olarak eşit midir? Kendi seçeceğiniz bir örnekle açıklayınız.

a) Tek karekök biçiminde yazalım
$4\sqrt{5} = \sqrt{(4^2 \cdot 5)} = \sqrt{(16 \cdot 5)} = \mathbf{\sqrt{80}}$
$5\sqrt{4} = \sqrt{(5^2 \cdot 4)} = \sqrt{(25 \cdot 4)} = \mathbf{\sqrt{100}}$

İkinci ifade zaten doğrudan da hesaplanabilirdi: √4 = 2 olduğundan 5√4 = 5 · 2 = **10**. Ve 10 = √100'dür ✓

b) Öğrenci haklı mıdır?
Haklı değildir.

Kök içleri karşılaştıralım: 80 ile 100 eşit değildir. O hâlde √80 ile √100 de eşit değildir.

Öğrencinin hatası, katsayı ile kök içindeki sayının **aynı rolü oynadığını** sanmasıdır. Oysa katsayı kök içine alınırken **karesi** alınır; kök içindeki sayı ise olduğu gibi kalır. Bu yüzden iki sayının yerini değiştirmek sonucu değiştirir.

c) Hangisi büyüktür?
100 > 80 olduğuna göre √100 > √80'dir.

5√4 = 10 sayısı, 4√5 sayısından büyüktür.

Yaklaşık değerlerle kontrol edelim: √5 ≈ 2,24 olduğundan 4√5 ≈ 8,96. Gerçekten de 10 sayısından küçüktür ✓

d) a√b ile b√a genel olarak eşit midir?
Hayır, genel olarak eşit değildir.

Örnek: 2√8 ile 8√2 sayılarını inceleyelim.
$2\sqrt{8} = \sqrt{(4 \cdot 8)} = \mathbf{\sqrt{32}}$
$8\sqrt{2} = \sqrt{(64 \cdot 2)} = \mathbf{\sqrt{128}}$

32 ile 128 eşit olmadığı için bu iki sayı da eşit değildir.

Peki hiç eşit olabilirler mi? a√b = b√a olması için kök içine alındığında $a^2b = b^2a$ olmalıdır. Bu da ancak **a = b** olduğunda sağlanır.

Örneğin 3√3 ile 3√3 elbette eşittir. Ama a ile b farklı olduğu sürece iki ifade **asla** eşit olmaz.

a) √80 ve √100 b) Haklı değil c) 5√4 = 10 büyüktür d) Yalnız a = b iken eşittirler

2. Bölüm Soru 6–10

6 Aşağıdaki dikdörtgenin kenar uzunlukları kareköklü ifadelerle verilmiştir.



a) Dikdörtgenin alanını a√b biçiminde en sade hâliyle bulunuz.
b) Dikdörtgenin çevresini bulunuz.
c) √2 ≈ 1,41 alarak alanın yaklaşık değerini bulunuz.
d) Bu dikdörtgenle aynı alana sahip olan ve bir kenarı 3√2 cm olan başka bir dikdörtgenin diğer kenarı kaç santimetredir?

Şekildeki kenar uzunlukları: **4√6 cm** ve **2√3 cm**

a) Alan
Dikdörtgenin alanı, kenar uzunluklarının çarpımıdır:
$4\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3} = (4 \cdot 2)\sqrt{(6 \cdot 3)} = 8\sqrt{18}$

Kök içinde tam kare çarpan var: $18 = 9 \cdot 2$
$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$8\sqrt{18} = 8 \cdot 3\sqrt{2} =$ **$24\sqrt{2}$ cm²**

b) Çevre
Çevre = 2 · (uzun kenar + kısa kenar)
$= 2 \cdot (4\sqrt{6} + 2\sqrt{3})$
$=$ **$8\sqrt{6} + 4\sqrt{3}$ cm**

Uyarı: Bu iki terim toplanamaz; çünkü kök içleri farklıdır (6 ve 3). Kareköklü ifadelerde toplama yalnızca kök içleri aynıyken yapılabilir.

c) Alanın yaklaşık değeri
$\sqrt{2} \approx 1{,}41$ alalım:
$24 \cdot 1{,}41 =$ **33,84 cm²**

İşlemi adım adım yapalım:
$24 \cdot 1{,}41 = 24 + 24 \cdot 0{,}41 = 24 + 9{,}84 =$ **33,84**

d) Aynı alana sahip diğer dikdörtgen
Alan yine $24\sqrt{2}$ cm² olmalıdır. Bir kenarı $3\sqrt{2}$ cm verildiğine göre diğer kenar bölmeyle bulunur:

$24\sqrt{2} : 3\sqrt{2} = (24 : 3)\sqrt{(2 : 2)} = 8\sqrt{1} =$ **8 cm**

Kontrol: $3\sqrt{2} \cdot 8 = 24\sqrt{2}$ ✓

Kök içleri aynı olduğu için bölümde kök içi 1 oldu ve sonuç bir doğal sayı çıktı.

a) $24\sqrt{2}$ cm² b) $8\sqrt{6} + 4\sqrt{3}$ cm c) ≈ 33,84 cm² d) 8 cm

7 Aşağıdaki sayı doğrusunda dört kareköklü ifade işaretlenmiştir.



a) Dört ifadeyi de a√b biçiminde en sade hâliyle yazınız.
b) Sadeleştirilmiş hâllerinde kök içi aynı olan iki sayı hangileridir? Bu iki sayının katsayıları arasındaki oran kaçtır?
c) √50 : √8 işleminin sonucunu bulup (b) şıkkındaki oranla karşılaştırınız.
d) √90 sayısı hangi iki ardışık doğal sayı arasındadır?

a) a√b biçiminde yazalım
√8 = √(4 · 2) = **2√2**
√27 = √(9 · 3) = **3√3**
√50 = √(25 · 2) = **5√2**
√90 = √(9 · 10) = **3√10**

Kontrol: Sayı doğrusundaki yerleri de bu değerlerle uyumludur. Örneğin 2√2 ≈ 2,83 olduğundan √8 işareti 2 ile 3 arasındadır ✓

b) Kök içi aynı olan iki sayı
Sadeleştirilmiş hâllere bakalım: 2√2, 3√3, 5√2, 3√10

Kök içi aynı olanlar: **2√2** ve **5√2** (yani √8 ile √50)

Katsayıları 2 ve 5'tir. Büyüğünün küçüğüne oranı:
5 : 2 = **5/2** (yani 2,5)

c) √50 : √8 işlemi
Kök içleri kendi aralarında bölünür:
√50 : √8 = √(50 : 8) = √6,25 = **2,5**

Aynı sonucu sadeleştirilmiş hâllerden de bulabiliriz:
5√2 : 2√2 = (5 : 2)√(2 : 2) = (5/2) · 1 = **5/2 = 2,5** ✓

İki sonuç aynı çıktı. **Kök içleri aynı olan iki ifadenin bölümü, katsayılarının oranına eşittir.** Bu, bölme kuralının doğrudan bir sonucudur.

d) √90 hangi iki ardışık doğal sayı arasında?
90 sayısına en yakın tam kareleri bulalım:
$9^2 = 81$ ve $10^2 = 100$

81 < 90 < 100 olduğuna göre:
√81 < √90 < √100
9 < √90 < 10

Yani √90 sayısı **9 ile 10 arasındadır**. Sayı doğrusunda da bu aralıkta işaretlenmiştir ✓

Üstelik 90 sayısı 100'e (uzaklık 10) 81'den (uzaklık 9) biraz daha uzaktır; bu yüzden √90 sayısı 9'a biraz daha yakındır.

devamı →

7 *(çözümün devamı)*

a) 2√2, 3√3, 5√2, 3√10 b) √8 ve √50, oran 5/2 c) 2,5 d) 9 ile 10 arasında

8 Bir usta, alanı **720 m²** olan kare biçimindeki bir arsanın çevresini telle çevirecektir.

a) Arsanın bir kenar uzunluğunu a√b biçiminde bulunuz.
b) Arsanın çevresini a√b biçiminde bulunuz.
c) √5 ≈ 2,24 alarak çevrenin yaklaşık değerini bulunuz.
d) Ustanın elinde 110 metre tel varsa bu tel arsayı çevirmeye yeter mi? Gerekçesiyle açıklayınız.

a) Kenar uzunluğu
Karede alan = kenar · kenar olduğuna göre **kenar = √alan**'dır.

Kenar = √720

720 sayısının tam kare çarpanlarını arayalım: 720 = **144** · 5
√720 = √(144 · 5) = **12√5 m**

Kontrol: 12√5 · 12√5 = 144 · 5 = 720 ✓

b) Çevre
Karenin çevresi bir kenarının 4 katıdır:
Çevre = 4 · 12√5 = **48√5 m**

Katsayı 4 ile 12 çarpıldı; kök içindeki 5 sayısı değişmedi.

c) Çevrenin yaklaşık değeri
√5 ≈ 2,24 alalım:
48 · 2,24 = ?

Adım adım hesaplayalım:
48 · 2 = 96
48 · 0,24 = 11,52
Toplam: 96 + 11,52 = **107,52 m**

d) 110 metre tel yeter mi?
Gereken tel uzunluğu yaklaşık **107,52 m**, elindeki tel **110 m**'dir.

107,52 < 110 olduğuna göre **tel yeter**.

Hatta geriye yaklaşık 110 − 107,52 = **2,48 m** tel artar.

Ek kontrol: Yaklaşık değer kullandığımız için sonucun güvenilirliğini sınayalım. √5 sayısı 2,24'ten biraz büyüktür (yaklaşık 2,236 olduğu için aslında biraz küçüktür). Gerçek çevre 48 · 2,236 ≈ 107,33 m'dir; yine 110'un altındadır. O hâlde cevap değişmez ✓

a) 12√5 m b) 48√5 m c) ≈ 107,52 m d) Yeter, ≈ 2,5 m artar

9 Bir marangozun atölyesinde üç çubuk vardır:

A çubuğu: **5√6 cm**
B çubuğu: **6√5 cm**
C çubuğu: **√180 cm**

a) Üç çubuğun uzunluğunu da tek bir karekök biçiminde yazınız.
b) Hangi iki çubuk birbirine eşit uzunluktadır?
c) En uzun çubuk hangisidir? Gerekçelendiriniz.
d) √5 ≈ 2,24 ve √6 ≈ 2,45 alarak A çubuğunun B çubuğundan kaç santimetre kısa olduğunu bulunuz.

a) Tek karekök biçiminde yazalım
A: 5√6 = √(25 · 6) = **√150**
B: 6√5 = √(36 · 5) = **√180**
C: **√180** (zaten bu biçimde verilmiş)

b) Eşit olan çubuklar
B ve C çubuklarının ikisi de **√180** cm'dir.

B ile C eşit uzunluktadır.

C çubuğunu sadeleştirirsek bunu daha açık görürüz:
√180 = √(36 · 5) = 6√5 → bu tam olarak B çubuğunun uzunluğudur ✓

c) En uzun çubuk
Kök içlerini karşılaştıralım: 150 < 180

O hâlde √150 < √180'dir; yani **A çubuğu en kısadır**, B ve C çubukları ise eşit ve **en uzundur**.

Dikkat çekici nokta: A çubuğunun katsayısı 5, kök içi 6; B çubuğunun katsayısı 6, kök içi 5'tir. Rakamlar aynı olmasına rağmen uzunluklar eşit değildir. Çünkü katsayı kök içine girerken **karesi** alınır ve $6^2 \cdot 5 = 180$ sayısı $5^2 \cdot 6 = 150$ sayısından büyüktür.

d) Aradaki fark
A çubuğu: 5√6 ≈ 5 · 2,45 = **12,25 cm**
B çubuğu: 6√5 ≈ 6 · 2,24 = **13,44 cm**

Fark: 13,44 − 12,25 = **1,19 cm**

A çubuğu, B çubuğundan yaklaşık **1,19 cm kısadır**.

Not: Kök içlerinin farkı 180 − 150 = 30 olduğu hâlde uzunlukların farkı yalnızca 1,19 cm çıktı. Karekök, sayılar arasındaki farkı **küçültür**; bu yüzden kök içlerinin farkına bakarak uzunluk farkı hakkında yorum yapılamaz.

a) √150, √180, √180 b) B ve C c) B ve C en uzun d) ≈ 1,19 cm

10 Bir sınavda **√48 : √3** işleminin sonucu sorulmuştur. Üç öğrencinin çözümü şöyledir:

Ali: √48 : √3 = √(48 : 3) = √16 = 4

Beril: √48 = 4√3 olduğuna göre 4√3 : √3 = 4

Cem: √48 : √3 = √(48 − 3) = √45 = 3√5

a) Hangi öğrenciler doğru çözmüştür?
b) Yanlış çözen öğrencinin hatasını açıklayınız.
c) Karekök hangi işlemler üzerine dağılır, hangileri üzerine dağılmaz?
d) √48 + √3 toplamının sonucu √51 midir? Hesaplayarak gösteriniz.

a) Doğru çözenler
Ali ve Beril doğru çözmüştür. İkisi de sonucu **4** bulmuştur.

Ali bölme kuralını doğrudan uygulamış, Beril ise önce √48 ifadesini sadeleştirip sonra bölmüştür. İki yol da geçerlidir.

Beril'in yolunu ayrıntılandıralım:
√48 = √(16 · 3) = 4√3
4√3 : √3 = (4 : 1)√(3 : 3) = 4√1 = **4** ✓

b) Cem'in hatası
Cem, bölme işlemini kök içinde **çıkarmaya** dönüştürmüştür. Böyle bir kural yoktur.

Doğru kural şudur: Bölmede kök içindeki sayılar kendi aralarında **bölünür**:
√a : √b = √(a : b)

Cem'in yönteminin yanlış olduğunu basit bir sayıyla da gösterebiliriz:
√36 : √9 = 6 : 3 = **2**
Cem'in yöntemiyle: √(36 − 9) = √27 ≈ 5,2
İki sonuç açıkça farklıdır ×

c) Karekök hangi işlemlere dağılır?
Dağılır: çarpma ve bölme
√a · √b = √(ab) · √a : √b = √(a : b)

Dağılmaz: toplama ve çıkarma
√a + √b, √(a + b) değildir · √a − √b, √(a − b) değildir

d) √48 + √3 toplamı √51 midir?
Hayır.

Doğru yol, önce ifadeleri sadeleştirip kök içlerini eşitlemektir:
√48 = 4√3

Artık iki terimin de kök içi 3'tür, katsayılar toplanabilir:
4√3 + √3 = (4 + 1)√3 = **5√3**

devamı →

10 *(çözümün devamı)*

Bunu tek karekök biçimine çevirirsek:
5√3 = √(25 · 3) = **√75**

√75 ile √51 eşit değildir. O hâlde √48 + √3 toplamı **√51 değil, 5√3'tür**.

Bu sonuç (c) şıkkını doğruluyor: karekök toplama üzerine dağılmaz.

a) Ali ve Beril b) Cem bölmeyi çıkarmaya çevirdi d) √51 değil, 5√3 = √75

3. Bölüm Soru 11–15

11 a ve b birer doğal sayı olmak üzere **√180 = a√b** eşitliği veriliyor.

a) Bu eşitliği sağlayan tüm (a, b) ikililerini yazınız.
b) a + b toplamının en küçük değerini bulunuz.
c) a + b toplamının en büyük değerini bulunuz.
d) a · b çarpımı her ikilide aynı mıdır? Değerlerini hesaplayarak açıklayınız.

a) Tüm (a, b) ikilileri
a√b = √180 olması için katsayıyı kök içine aldığımızda $\mathbf{a^2 \cdot b = 180}$ olmalıdır.

O hâlde $\mathbf{a^2}$ sayısı 180'i tam bölmelidir. Önce 180'i bölen tam kareleri bulalım.

180 = 2 · 2 · 3 · 3 · 5 olduğuna göre 180'in bölenleri arasındaki tam kareler: **1, 4, 9, 36**

Buna göre a sayısı **1, 2, 3, 6** olabilir:

- a = 1 → b = 180 : 1 = **180** → (1, 180)
- a = 2 → b = 180 : 4 = **45** → (2, 45)
- a = 3 → b = 180 : 9 = **20** → (3, 20)
- a = 6 → b = 180 : 36 = **5** → (6, 5)

Dört farklı ikili vardır. Yazılışlar: √180, 2√45, 3√20, 6√5

b) a + b toplamının en küçük değeri
1 + 180 = **181**
2 + 45 = **47**
3 + 20 = **23**
6 + 5 = **11**

En küçük toplam: **11**

Bu, ifadenin **en sade hâline** karşılık gelir: 6√5. Kök içinde tam kare çarpan kalmadığında a + b toplamı en küçük olur.

c) a + b toplamının en büyük değeri
Yukarıdaki listede en büyük toplam: **181**

Bu da hiç sadeleştirme yapılmamış hâle karşılık gelir: 1√180 = √180. Katsayı en küçük (1) olduğunda kök içi en büyük değerini alır.

devamı →

11 *(çözümün devamı)*

d) a · b çarpımı aynı mıdır?
Hayır, aynı değildir. Hesaplayalım:

1 · 180 = **180**
2 · 45 = **90**
3 · 20 = **60**
6 · 5 = **30**

Dört farklı değer çıktı. Aralarında bir örüntü de var: $a^2 \cdot b = 180$ olduğundan
$a \cdot b = 180 : a$

Yani a büyüdükçe a · b çarpımı küçülür. Gerçekten de:
180 : 1 = 180 · 180 : 2 = 90 · 180 : 3 = 60 · 180 : 6 = 30 ✓

a) (1,180), (2,45), (3,20), (6,5) b) 11 c) 181 d) Hayır: 180, 90, 60, 30

12 Bir çerçeve ustası, **eşkenar üçgen** biçiminde bir çerçeve yapmak için elindeki dört çubuktan üçünü kullanacaktır. Çubukların uzunlukları şöyledir:

Yeşil: **5√8 cm**
Mavi: **10√2 cm**
Turuncu: **2√50 cm**
Mor: **4√6 cm**

Çubuklarda hiçbir kısaltma yapılmayacaktır.

a) Dört çubuğun uzunluğunu da a√b biçiminde en sade hâliyle yazınız.
b) Hangi üç çubuk eşkenar üçgen oluşturur? Gerekçelendiriniz.
c) Kullanılmayan çubuk hangisidir?
d) Oluşan eşkenar üçgenin çevresi kaç santimetredir?
e) Kullanılmayan çubuk, seçilen çubuklardan uzun mudur kısa mıdır?

a) En sade hâlleriyle yazalım

Yeşil: 5√8
√8 = √(4 · 2) = 2√2
5√8 = 5 · 2√2 = **10√2 cm**

Mavi: 10√2 cm (zaten en sade hâlde)

Turuncu: 2√50
√50 = √(25 · 2) = 5√2
2√50 = 2 · 5√2 = **10√2 cm**

Mor: 4√6
6 sayısının tam kare çarpanı yoktur, ifade **4√6 cm** olarak kalır.

devamı →

12 *(çözümün devamı)*

b) Eşkenar üçgeni oluşturan çubuklar
Eşkenar üçgenin üç kenarı da **eşit uzunlukta** olmalıdır.

Sadeleştirilmiş hâllere bakalım:
Yeşil = 10√2 · Mavi = 10√2 · Turuncu = 10√2 · Mor = 4√6

İlk üç çubuk birbirine eşittir.

Yeşil, mavi ve turuncu çubuklar eşkenar üçgen oluşturur.

Dikkat: Üç çubuk başlangıçta **farklı görünüyordu** (5√8, 10√2, 2√50). Sadeleştirmeden bakıldığında eşit oldukları anlaşılamazdı. Bu, sadeleştirmenin neden gerekli olduğunu gösteren iyi bir örnektir.

c) Kullanılmayan çubuk
Mor çubuk (4√6 cm) kullanılmaz; çünkü diğer üçünden farklı uzunluktadır.

d) Eşkenar üçgenin çevresi
Çevre, bir kenarın 3 katıdır:
3 · 10√2 = **30√2 cm**

Yaklaşık değeri: √2 ≈ 1,41 alınırsa 30 · 1,41 = **42,3 cm**

e) Mor çubuk uzun mu kısa mı?
Karşılaştırmak için ikisini de kök içine alalım:
10√2 = √(100 · 2) = **√200**
4√6 = √(16 · 6) = **√96**

96 < 200 olduğuna göre:
Mor çubuk, seçilen çubuklardan kısadır.

Yaklaşık değerlerle kontrol: 4√6 ≈ 4 · 2,45 = 9,8 cm; 10√2 ≈ 14,1 cm ✓

a) 10√2, 10√2, 10√2, 4√6 b) Yeşil, mavi, turuncu c) Mor d) 30√2 cm e) Kısadır

13 Aşağıdaki altı işlem veriliyor.

I. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$
II. $\sqrt{75} : \sqrt{3}$
III. $2\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$
IV. $12\sqrt{8} : 3\sqrt{2}$
V. $\sqrt{6}$ ifadesinin karesi
VI. $5\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$

a) Her işlemin sonucunu en sade hâliyle bulunuz.
b) Sonucu doğal sayı olanlarla kareköklü kalanları ayırınız.
c) Bir çarpımın sonucunun doğal sayı olması için hangi koşulun sağlanması gerekir?
d) Sonucu en büyük olan işlem hangisidir? Gerekçelendiriniz.

a) Sonuçlar

I. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$
Kök içleri çarpılır: $\sqrt{(3 \cdot 12)} = \sqrt{36} = \mathbf{6}$

II. $\sqrt{75} : \sqrt{3}$
Kök içleri bölünür: $\sqrt{(75 : 3)} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$

III. $2\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$
$2\sqrt{(5 \cdot 10)} = 2\sqrt{50}$
$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ olduğundan: $2 \cdot 5\sqrt{2} = \mathbf{10\sqrt{2}}$

IV. $12\sqrt{8} : 3\sqrt{2}$
$(12 : 3)\sqrt{(8 : 2)} = 4\sqrt{4} = 4 \cdot 2 = \mathbf{8}$

V. $\sqrt{6}$ ifadesinin karesi
$\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = \mathbf{6}$

VI. $5\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$
$5\sqrt{(2 \cdot 6)} = 5\sqrt{12}$
$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ olduğundan: $5 \cdot 2\sqrt{3} = \mathbf{10\sqrt{3}}$

b) Sınıflandırma
Sonucu doğal sayı olanlar: I (6), II (5), IV (8), V (6)
Kareköklü kalanlar: III ($10\sqrt{2}$), VI ($10\sqrt{3}$)

c) Sonucun doğal sayı olma koşulu
Bir çarpımın ya da bölümün sonucunun doğal sayı olması için, işlemden sonra **kök içinde kalan sayının tam kare olması** gerekir.

Örneklerle görelim:
• I'de kök içi 36 oldu → tam kare → sonuç doğal sayı
• III'te kök içi 50 oldu → tam kare değil → kareköklü kaldı

V. işlem bu koşulun en net örneğidir: Aynı kareköklü ifade kendisiyle çarpıldığında kök içi her zaman tam kare ($6 \cdot 6 = 36$) olur; bu yüzden sonuç daima doğal sayıdır.

devamı →

13 *(çözümün devamı)*

d) En büyük sonuç
Değerleri sıralayabilmek için kareköklü olanları da karşılaştırılabilir biçime getirelim:
$10\sqrt{2} = \sqrt{(100 \cdot 2)} = \mathbf{\sqrt{200}}$
$10\sqrt{3} = \sqrt{(100 \cdot 3)} = \mathbf{\sqrt{300}}$

Doğal sayıları da yazalım:
$6 = \sqrt{36}$ · $5 = \sqrt{25}$ · $8 = \sqrt{64}$

Kök içleri: 25, 36, 64, 200, 300

En büyük kök içi **300**'dür.

Cevap: En büyük sonuç VI. işlemin sonucudur ($10\sqrt{3} \approx 17{,}3$).

Not: III ile VI'nın katsayıları aynı (10) olduğu için bu ikisi doğrudan kök içlerine bakılarak da karşılaştırılabilirdi: $3 > 2$ olduğundan $10\sqrt{3} > 10\sqrt{2}$ ✓

b) Doğal sayı: I, II, IV, V · Kareköklü: III, VI d) VI ($10\sqrt{3}$)

14 Alanı **$12\sqrt{3}$ cm²** olan bir dikdörtgenin kısa kenarı **$\sqrt{6}$ cm**'dir.

a) Dikdörtgenin alanını tek bir karekök biçiminde yazınız.
b) Uzun kenarı $a\sqrt{b}$ biçiminde bulunuz.
c) Dikdörtgenin çevresini bulunuz.
d) $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ ve $\sqrt{6} \approx 2{,}45$ alarak çevrenin yaklaşık değerini bulunuz.
e) Bu dikdörtgenin alanına eşit alana sahip, bir kenarı $2\sqrt{3}$ cm olan başka bir dikdörtgenin diğer kenarı kaç santimetredir?

a) Alanı tek karekök biçiminde yazalım
Katsayıyı kök içine alalım:
$12\sqrt{3} = \sqrt{(12^2 \cdot 3)} = \sqrt{(144 \cdot 3)} = \mathbf{\sqrt{432}}$ **cm²**

b) Uzun kenar
Dikdörtgende **diğer kenar = alan : bilinen kenar**'dır.

Alanı ve kenarı tek karekök biçiminde tutalım; böylece bölme kolaylaşır:
$\sqrt{432} : \sqrt{6} = \sqrt{(432 : 6)} = \mathbf{\sqrt{72}}$

Sadeleştirelim:
$\sqrt{72} = \sqrt{(36 \cdot 2)} = \mathbf{6\sqrt{2}}$ **cm**

Kontrol: $\sqrt{6} \cdot 6\sqrt{2} = 6\sqrt{12} = 6 \cdot 2\sqrt{3} = \mathbf{12\sqrt{3}}$ ✓ Alan doğru çıktı.

Kenarlar tutarlı mı? $\sqrt{6} \approx 2{,}45$ cm ve $6\sqrt{2} \approx 8{,}49$ cm. Gerçekten de $\sqrt{6}$ kısa kenar, $6\sqrt{2}$ uzun kenardır ✓

devamı →

14 *(çözümün devamı)*

c) Çevre
Çevre = 2 · (kısa kenar + uzun kenar)
= 2 · (√6 + 6√2)
= **2√6 + 12√2 cm**

İki terim toplanamaz; çünkü kök içleri farklıdır (6 ve 2).

d) Çevrenin yaklaşık değeri
√6 ≈ 2,45 ve √2 ≈ 1,41 alalım:

2√6 ≈ 2 · 2,45 = **4,90**
12√2 ≈ 12 · 1,41 = **16,92**

Çevre ≈ 4,90 + 16,92 = **21,82 cm**

e) Aynı alana sahip diğer dikdörtgen
Alan yine 12√3 cm^2 olmalıdır. Bir kenarı 2√3 cm verildiğine göre:

12√3 : 2√3 = (12 : 2)√(3 : 3) = 6√1 = **6 cm**

Kontrol: 2√3 · 6 = 12√3 ✓

Bu dikdörtgenin kenarları 2√3 cm (≈ 3,46 cm) ve 6 cm'dir. İlk dikdörtgenle aynı alana sahip olsa da çevresi farklıdır:
2 · (2√3 + 6) = 4√3 + 12 ≈ 4 · 1,73 + 12 = **18,92 cm**

Yani aynı alana sahip iki dikdörtgenin çevreleri eşit olmak zorunda değildir.

a) √432 b) 6√2 cm c) 2√6 + 12√2 cm d) ≈ 21,82 cm e) 6 cm

15 Aşağıdaki koşulların tamamını sağlayan **bir çarpma** ve **bir bölme** işlemi yazınız.

- Çarpmanın her iki çarpanı da a√b biçiminde olmalı ve **katsayıları 1'den büyük** olmalıdır.
- Çarpmanın sonucu bir **doğal sayı** olmalı ve bu sayı **100'den küçük** olmalıdır.
- Bölmenin sonucu ise **kareköklü kalmalı**, yani doğal sayı olmamalıdır.

a) İşlemlerinizi yazınız.
b) Her iki işlemi de adım adım çözünüz.
c) Çarpmanın sonucunun neden doğal sayı çıktığını açıklayınız.
d) Bölmenin sonucunu doğal sayı yapmak için bölen nasıl değiştirilmelidir?

Bu soruda tek bir doğru cevap yoktur; koşulları sağlayan her işlem çifti kabul edilir. Aşağıda örnek bir çözüm verilmiştir.

a) Örnek işlemler
Çarpma: 3√6 · 2√6
Bölme: 12√50 : 2√5

b) Çözümler

Çarpma:
3√6 · 2√6 = (3 · 2)√(6 · 6) = 6√36
√36 = 6 olduğuna göre:
6 · 6 = **36**

Koşulları kontrol edelim:
- Her iki çarpanın katsayısı da 1'den büyük (3 ve 2) ✓
- Sonuç doğal sayı (36) ✓
- Sonuç 100'den küçük ✓

Bölme:
12√50 : 2√5 = (12 : 2)√(50 : 5) = 6√10
10 sayısının tam kare çarpanı yoktur (10 = 2 · 5), o hâlde sonuç:
6√10

Koşul kontrolü: Sonuç kareköklü kaldı, doğal sayı değil ✓
Yaklaşık değeri: 6 · 3,16 ≈ 18,97

c) Çarpma neden doğal sayı çıktı?
Çünkü iki çarpanın **kök içleri aynıydı** (ikisi de 6).

Aynı sayının kendisiyle çarpımı her zaman tam karedir: 6 · 6 = 36. Kök içi tam kare olduğunda karekök işareti kaybolur ve sonuç doğal sayı olur.

Genel kural: **√b · √b = b**'dir. Katsayılar da çarpıldığında sonuç a · c · b biçiminde bir doğal sayı olur.

Doğal sayı elde etmenin tek yolu bu değildir. Kök içlerinin çarpımı tam kare olduğunda da sonuç doğal sayı çıkar; örneğin 2√8 · 3√2 = 6√16 = 6 · 4 = **24**.

d) Bölmenin sonucunu doğal sayı yapmak
Bölmenin sonucu 6√10 idi; kök içi 10 tam kare olmadığı için karekök kaldı.

devamı →

15 *(çözümün devamı)*

Kök içinin tam kare olması için bölen değiştirilmelidir. Bölünen 12√50 olduğuna göre:

Bölen **2√2** olursa:
12√50 : 2√2 = (12 : 2)√(50 : 2) = 6√25 = 6 · 5 = **30** → doğal sayı ✓

Bölen **3√50** olursa:
12√50 : 3√50 = (12 : 3)√(50 : 50) = 4√1 = **4** → doğal sayı ✓

Kural: Bölenin kök içi, bölünenin kök içini **tam kare verecek biçimde** bölmelidir. 50 : 2 = 25 tam karedir, 50 : 5 = 10 ise değildir.

Örnek: 3√6 · 2√6 = 36 · 12√50 : 2√5 = 6√10 · bölen 2√2 olursa sonuç 30