KONU ANLATIMLI SORU ÇÖZÜMLERİ

Kareköklü İfadelerin Farklı Gösterimleri, Çarpma ve Bölme İşlemleri

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 — a√b biçiminde yazmanın tüm yolları

√300 kareköklü ifadesi veriliyor.
a) Tam kare çarpandan yararlanarak bu ifadeyi a√b biçiminde yazınız.
b) Aynı sonucu asal çarpanlara ayırarak bulunuz.
c) √300 = a√b olacak biçimde a ve b doğal sayılarının alabileceği **tüm** değerleri yazınız.
d) a + b toplamının **en küçük** değerini bulunuz.

1 a) Tam kare çarpan yöntemi

300 sayısının tam kare çarpanlarını arayalım: 4, 25 ve 100 sayıları 300'ü tam böler.

Bunların **en büyüğü 100**'dür:
300 = 100 · 3

√300 = √(100 · 3) = **10√3**

Kök içinde kalan 3 sayısının tam kare çarpanı yoktur; ifade en sade hâlindedir.

2 b) Asal çarpanlara ayırma yöntemi

300 sayısını asal çarpanlarına ayıralım:
300 = 2 · 150 = 2 · 2 · 75 = 2 · 2 · 3 · 25 = 2 · 2 · 3 · 5 · 5

Yani: **300 = 2 · 2 · 3 · 5 · 5**

Çarpanları ikişerli gruplayalım:
(2 · 2) · (5 · 5) · 3

Her ikili gruptan bir tane dışarı çıkar:
Dışarı çıkanlar: 2 ve 5 → 2 · 5 = **10**
İçeride kalan: **3**

√300 = **10√3** ✓

İki yöntem de aynı sonucu verdi.

3 c) Tüm (a, b) ikililerini bulalım

a√b = √300 olması için $\mathbf{a^2 \cdot b = 300}$ olmalıdır.

O hâlde $\mathbf{a^2}$ sayısı 300'ü tam bölmelidir. 300'ü bölen tam kareler: **1, 4, 25, 100**

Buna göre a sayısı **1, 2, 5, 10** olabilir:

- a = 1 → b = 300 : 1 = **300** (√300)
- a = 2 → b = 300 : 4 = **75** (2√75)
- a = 5 → b = 300 : 25 = **12** (5√12)

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 **a√b biçiminde yazmanın tüm yolları** (devam)

- a = 10 → b = 300 : 100 = **3** (10√3)

Dört farklı yazılış vardır. Hepsi aynı sayıyı gösterir, ama yalnız sonuncusu **en sade** hâldir.

4 d) a + b toplamının en küçük değeri

Dört ikili için toplamları hesaplayalım:

- 1 + 300 = **301**
- 2 + 75 = **77**
- 5 + 12 = **17**
- 10 + 3 = **13**

En küçük toplam: **13**

Sonuç: a + b toplamının en küçük değeri 13'tür.

Genel kural: a + b toplamı, ifade **en sade hâlde** yazıldığında (yani kök içinde tam kare çarpan kalmadığında) en küçük değerini alır. Bu yüzden bu tür sorularda önce ifadeyi en sade hâline getirmek yeterlidir.

Sonuç: a) 10√3 b) Aynı sonuç c) (1,300), (2,75), (5,12), (10,3) d) 13

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Kök içine alma ve sıralama**

4√5, 3√7, 6√2 ve **9** sayıları veriliyor.
a) Dördünü de tek bir karekök biçiminde yazınız.
b) Bu sayıları **küçükten büyüğe** sıralayınız.
c) Bu sayılardan hangileri 8 ile 9 arasındadır?
d) √80 sayısı, verilen sayılardan hangisine eşittir?

1 a) Katsayıları kök içine alalım

Her ifadede katsayının **karesi** alınıp kök içindeki sayıyla çarpılır.

$4\sqrt{5} = \sqrt{(4^2 \cdot 5)} = \sqrt{(16 \cdot 5)} = \mathbf{\sqrt{80}}$

$3\sqrt{7} = \sqrt{(3^2 \cdot 7)} = \sqrt{(9 \cdot 7)} = \mathbf{\sqrt{63}}$

$6\sqrt{2} = \sqrt{(6^2 \cdot 2)} = \sqrt{(36 \cdot 2)} = \mathbf{\sqrt{72}}$

$9 = \sqrt{(9^2)} = \mathbf{\sqrt{81}}$

Dört sayı da artık aynı biçimde; yalnız kök içlerine bakmak yeterli.

2 b) Sıralama

Kök içlerini küçükten büyüğe sıralayalım:

$63 < 72 < 80 < 81$

Kök içindeki sayı büyüdükçe kareköün değeri de büyür:

$\sqrt{63} < \sqrt{72} < \sqrt{80} < \sqrt{81}$

Asıl hâlleriyle yazalım:

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Kök içine alma ve sıralama** (devam)

3√7 < 6√2 < 4√5 < 9

Dikkat edilecek nokta: Katsayısı en büyük olan 6√2 en büyük değeri vermedi; katsayısı hiç olmayan 9 en büyük çıktı. Katsayılara bakarak sıralama yapmak **yanlıştır**.

3 c) 8 ile 9 arasındaki sayılar

Önce 8 ve 9 sayılarını da aynı biçime getirelim:

8 = √64 · 9 = √81

Şimdi hangi kök içlerinin 64 ile 81 arasında olduğuna bakalım:

- √63 → 63 sayısı 64'ten küçük, **aralıkta değil**
- √72 → 64 < 72 < 81, **aralıkta**
- √80 → 64 < 80 < 81, **aralıkta**
- √81 → 81 sayısının kendisi 9'dur, **aralıkta değil**

Cevap: 6√2 ve 4√5 sayıları 8 ile 9 arasındadır.

Bu soruda iki sayı birden aralığa düştü. Bir sayının hangi iki tam sayı arasında olduğunu bulmak için, tam sayıları da karekök biçimine çevirmek en güvenli yoldur.

4 d) √80 hangisine eşit?

(a) şıkkında 4√5 = √80 bulmuştuk.

Cevap: √80 = 4√5

Ters yönden kontrol edelim:

√80 = √(16 · 5) = 4√5 ✓

Bu soru, kök içine alma ile kök dışına çıkarmanın **birbirinin tersi** iki işlem olduğunu gösteriyor. Hangi yöne gitmen gerektiğine sorunun ne istediğine bakarak karar verirsin: sıralama yapılacaksa kök içine al, sadeleştirme yapılacaksa kök dışına çıkar.

Sonuç: a) √80, √63, √72, √81 b) 3√7 < 6√2 < 4√5 < 9 c) 6√2 ve 4√5 d) 4√5

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Çarpma ve bölme bir arada**

Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını en sade hâliyle bulunuz.

a) 3√6 · 2√10

b) 12√45 : 4√5

c) (2√6 · 3√8) : √12

d) Payı 10, paydası √5 olan kesir

1 a) 3√6 · 2√10

Katsayıları ve kök içlerini ayrı ayrı çarpalım:

(3 · 2)√(6 · 10) = 6√60

Kök içinde tam kare çarpan var mı? 60 = 4 · 15

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Çarpma ve bölme bir arada** (devam)

√60 = √(4 · 15) = 2√15

6√60 = 6 · 2√15 = **12√15**

Uyarı: 6√60 cevabında durmak eksik olurdu. Kök içinde tam kare çarpan kaldığı sürece işlem bitmemiştir.

2 **b) 12√45 : 4√5**

Katsayıları ve kök içlerini ayrı ayrı bölelim:

(12 : 4)√(45 : 5) = 3√9

√9 = 3 olduğuna göre:

3 · 3 = **9**

Sonuç bir **doğal sayı** çıktı. Bunun sebebi, kök içlerinin bölümünün (9) tam kare olmasıdır.

3 **c) (2√6 · 3√8) : √12**

İşlem önceliği gereği önce **parantez içindeki çarpma** yapılır.

Çarpma:

2√6 · 3√8 = (2 · 3)√(6 · 8) = 6√48

√48 = √(16 · 3) = 4√3

6√48 = 6 · 4√3 = **24√3**

Bölme:

Bölen ifadeyi de sadeleştirelim: √12 = 2√3

24√3 : 2√3 = (24 : 2)√(3 : 3) = 12√1 = **12**

Kök içleri aynı olduğu için bölümde kök içi 1 oldu ve karekök işareti kayboldu.

4 **d) Payı 10, paydası √5 olan kesir**

Paydada karekök kalmaması için pay ve paydayı **√5 ile çarpalım**:

Pay: 10 · √5 = 10√5

Payda: √5 · √5 = 5

Sonuç: (10√5) : 5 = **2√5**

İkinci yol: Paydaki 10 sayısını da kök içine alalım:

10 = √100

√100 : √5 = √20 = √(4 · 5) = **2√5** ✓

Kontrol: 2√5 · √5 = 2 · 5 = 10 ✓ Bölümle böleni çarptığımızda bölüneni elde ettik.

Sonuç: a) 12√15 b) 9 c) 12 d) 2√5

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Kareköklü ifadelerle alan ve çevre**

Kare biçimindeki bir bahçenin alanı **512 m²**'dir.
a) Bahçenin bir kenar uzunluğunu a√b biçiminde bulunuz.
b) Bahçenin çevresini a√b biçiminde bulunuz.
c) √2 ≈ 1,41 alarak çevrenin yaklaşık değerini bulunuz.
d) Bahçenin çevresi, metresi 250 TL olan tel ile çevrilecektir. Yaklaşık kaç TL gerekir?
e) Bu bahçeyle aynı alana sahip, bir kenarı 8√2 m olan dikdörtgen biçimindeki bir bahçenin diğer kenarı kaç metredir?

1 **a) Kenar uzunluğu**

Karede **alan = kenar · kenar** olduğuna göre **kenar = √alan**'dır.

Kenar = √512

512 sayısının tam kare çarpanlarını arayalım: 512 = 256 · 2 ve 256 = 16²'dir.

√512 = √(256 · 2) = **16√2 m**

Kontrol: 16√2 · 16√2 = 256 · 2 = 512 ✓

2 **b) Çevre**

Karenin çevresi, bir kenarının **4 katıdır**:

Çevre = 4 · 16√2 = **64√2 m**

Katsayı 4 ile 16 çarpıldı; kök içindeki 2 sayısı değişmedi. Karekök işareti yalnız kök içiyle ilgilidir, katsayıyla yapılan çarpma onu etkilemez.

3 **c) Çevrenin yaklaşık değeri**

√2 yerine 1,41 yazalım:

Çevre ≈ 64 · 1,41 = **90,24 m**

İşlemi adım adım yapalım:
64 · 1,41 = 64 · 1 + 64 · 0,41 = 64 + 26,24 = **90,24**

Yani bahçenin çevresi yaklaşık **90 metre**dir.

4 **d) Tel maliyeti**

Gereken tel uzunluğu yaklaşık 90,24 metredir. Metresi 250 TL olduğuna göre:

90,24 · 250 = ?

Adım adım hesaplayalım:
90 · 250 = 22 500
0,24 · 250 = 60
Toplam: 22 500 + 60 = **22 560 TL**

Yaklaşık 22 560 TL gerekir.

Not: Gerçek uygulamada tel tam ölçüde satılmayacağı için biraz fazlasının alınması gerekir; bu yüzden bu tür sorularda sonuç "yaklaşık" diye verilir.

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Kareköklü ifadelerle alan ve çevre** (devam)

5 **e) Aynı alana sahip dikdörtgen**

Dikdörtgenin alanı da **512 m²** olmalıdır. Bir kenarı 8√2 m verildiğine göre diğer kenar bölmeyle bulunur:

Diğer kenar = 512 : (8√2)

512 sayısını a√b biçiminde yazalım: 512 = 256 · 2 olduğundan bölmeyi kolaylaştırmak için 512'yi olduğu gibi bırakıp payı ve paydayı √2 ile çarpalım:

(512 · √2) : (8√2 · √2) = (512√2) : (8 · 2) = (512√2) : 16 = **32√2 m**

Kontrol: 8√2 · 32√2 = (8 · 32) · 2 = 256 · 2 = **512** ✓

Bu dikdörtgenin kenarları 8√2 m (≈ 11,28 m) ve 32√2 m (≈ 45,12 m)'dir. Aynı alana sahip olsalar da kare bahçenin çevresi (≈ 90,24 m) bu dikdörtgeninkinden (≈ 112,80 m) daha kısadır.

Sonuç: a) 16√2 m b) 64√2 m c) ≈ 90,24 m d) ≈ 22 560 TL e) 32√2 m