ÇÖZÜMLER

Sonucu Doğal Sayı Yapan Çarpanlar, Kareköklü İfadelerde Toplama ve Çıkarma

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

1. Bölüm Soru 1–5

1 Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) 4√6 + 3√6
b) 9√2 − √2
c) 5√7 − 8√7 + 2√7
d) √5 + √11 işlemi neden yapılamaz? Açıklayınız.

a) 4√6 + 3√6
Kök içleri aynı (6); katsayıları toplarız:
(4 + 3)√6 = **7√6**

b) 9√2 − √2
İkinci terimin katsayısı yazılmamış; o hâlde katsayısı **1**'dir.
(9 − 1)√2 = **8√2**

Sık yapılan hata: İkinci terimin katsayısını 0 sayıp 9√2 demek. Katsayısı yazılmayan terimin katsayısı her zaman 1'dir.

c) 5√7 − 8√7 + 2√7
Üç terimin de kök içi 7; katsayılarla işlem yapalım:
(5 − 8 + 2)√7 = (−3 + 2)√7 = **−√7**

Sonucun katsayısı −1 olduğu için önüne yalnız eksi işareti yazılır: −√7

d) √5 + √11 neden yapılamaz?
Toplama ve çıkarma yalnız **kök içleri aynı** olan terimler arasında yapılabilir. Burada kök içleri 5 ve 11'dir; ikisi de tam kare çarpan içermediği için sadeleştirilemez ve eşitlenemez.

O hâlde ifade **aynen kalır**: √5 + √11

Uyarı: √5 + √11 = √16 = 4 demek **yanlıştır**. Karekök toplama üzerine dağılmaz.

Gerçek değerleri karşılaştıralım: √5 ≈ 2,24 ve √11 ≈ 3,32; toplamları ≈ 5,56. Oysa √16 = 4'tür. İki sayı açıkça farklıdır.

a) 7√6 b) 8√2 c) −√7 d) Kök içleri farklı, eşitlenemiyor

2 Aşağıdaki altı işlem veriliyor.

I. $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$
II. $\sqrt{8} + \sqrt{2}$
III. $3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$
IV. $3\sqrt{5} + \sqrt{5}$
V. $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$
VI. $\sqrt{12} - \sqrt{3}$

a) Her işlemin sonucunu bulunuz.
b) Sonucu doğal sayı olanlarla kareköklü kalanları ayırınız.
c) Çarpma işlemleri doğal sayı verirken toplama ve çıkarma işlemleri neden vermiyor? Açıklayınız.

a) Sonuçlar

I. $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$
Kök içleri çarpılır: $\sqrt{16} = \mathbf{4}$

II. $\sqrt{8} + \sqrt{2}$
Önce sadeleştirelim: $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
$2\sqrt{2} + \sqrt{2} = (2 + 1)\sqrt{2} = \mathbf{3\sqrt{2}}$

III. $3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$
$3 \cdot (\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}) = 3 \cdot 5 = \mathbf{15}$

IV. $3\sqrt{5} + \sqrt{5}$
$(3 + 1)\sqrt{5} = \mathbf{4\sqrt{5}}$

V. $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$
$\sqrt{(12 \cdot 3)} = \sqrt{36} = \mathbf{6}$

VI. $\sqrt{12} - \sqrt{3}$
$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
$2\sqrt{3} - \sqrt{3} = (2 - 1)\sqrt{3} = \mathbf{\sqrt{3}}$

b) Sınıflandırma
Sonucu doğal sayı olanlar: I (4), III (15), V (6)
Kareköklü kalanlar: II ($3\sqrt{2}$), IV ($4\sqrt{5}$), VI ($\sqrt{3}$)

Dikkat edilirse doğal sayı olanların hepsi **çarpma**, kareköklü kalanların hepsi **toplama ya da çıkarma**.

c) Neden böyle?
Sebep, karekökün hangi işlemlere dağıldığıdır.

Çarpmada kök içleri birleşir: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{(a \cdot b)}$. Kök içlerinin çarpımı tam kare olursa karekök işareti tamamen kaybolur.
Örnek: $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$ (16 tam kare)

Toplamada ise kök içleri birleşmez. Yapılabilen tek şey, aynı kök içine sahip terimlerin **katsayılarını** toplamaktır; karekök işareti yerinde kalır.
Örnek: $2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ ($\sqrt{2}$ hâlâ orada)

devamı →

2 *(çözümün devamı)*

Kısacası: **Çarpma karekökü yok edebilir, toplama edemez.**

Toplamanın sonucu ancak özel bir durumda doğal sayı olur: katsayıların toplamı **sıfır** ise. Örneğin 3√5 − 3√5 = 0 bir doğal sayıdır.

a) 4, 3√2, 15, 4√5, 6, √3 b) Doğal: I, III, V · Kareköklü: II, IV, VI

3 Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını en sade hâliyle bulunuz.

a) √48 + √27 − √75
b) 2√18 − √32 + √50
c) √98 − 3√8 + √18
d) Bulduğunuz üç sonucu küçükten büyüğe sıralayınız.

a) √48 + √27 − √75
Terimleri sadeleştirelim:
√48 = √(16 · 3) = **4√3**
√27 = √(9 · 3) = **3√3**
√75 = √(25 · 3) = **5√3**

Katsayılarla işlem:
(4 + 3 − 5)√3 = **2√3**

b) 2√18 − √32 + √50
Terimleri sadeleştirelim:
2√18 = 2 · 3√2 = **6√2**
√32 = √(16 · 2) = **4√2**
√50 = √(25 · 2) = **5√2**

Katsayılarla işlem:
(6 − 4 + 5)√2 = **7√2**

Uyarı: Birinci terimde dıştaki 2 ile sadeleştirmeden çıkan 3'ü çarpmayı unutmamak gerekir: 2 · 3√2 = 6√2

c) √98 − 3√8 + √18
Terimleri sadeleştirelim:
√98 = √(49 · 2) = **7√2**
3√8 = 3 · 2√2 = **6√2**
√18 = √(9 · 2) = **3√2**

Katsayılarla işlem:
(7 − 6 + 3)√2 = **4√2**

devamı →

3 *(çözümün devamı)*

d) Sıralama
Bulduğumuz değerler: **2√3**, **7√2**, **4√2**

İkisinin kök içi 2, birinin 3. Karşılaştırmak için hepsini tek karekök biçimine getirelim:
2√3 = √(4 · 3) = **√12**
7√2 = √(49 · 2) = **√98**
4√2 = √(16 · 2) = **√32**

Kök içleri: 12 < 32 < 98

Sıralama: **2√3 < 4√2 < 7√2**
yani **a < c < b**

Yaklaşık kontrol: 2√3 ≈ 3,46 · 4√2 ≈ 5,66 · 7√2 ≈ 9,90 ✓

a) 2√3 b) 7√2 c) 4√2 d) a < c < b

4 Kerem, **√9 + √16** işlemini aşağıdaki gibi çözmüştür.

√9 + √16
= √(9 + 16)
= √25
= 5

a) Kerem'in hatasını açıklayınız.
b) İşlemin doğru sonucunu bulunuz.
c) Doğru sonuç hangi sayının kareköküdür?
d) Karekök hangi işlemler üzerine dağılır, hangileri üzerine dağılmaz? Birer örnekle gösteriniz.

a) Hata nerede?
Kerem **ilk adımda** hata yapmıştır. İki karekökün toplamını, kök içlerinin toplamının kareköku sanmıştır.

Böyle bir kural **yoktur**:
√a + √b, √(a + b) **değildir**.

Karekök yalnız **çarpma** ve **bölme** üzerine dağılır; toplama ve çıkarma üzerine dağılmaz.

b) Doğru çözüm
Her kareköku ayrı ayrı hesaplayalım:
√9 = **3**
√16 = **4**

Toplayalım:
3 + 4 = **7**

Kerem'in bulduğu 5 ile doğru sonuç 7 arasındaki fark **2**'dir.

devamı →

4 *(çözümün devamı)*

c) 7 hangi sayının kareköküdür?
7 = √49

Yani **√9 + √16 = √49**'dur, √25 değil.

Bu karşılaştırma hatayı çok net gösteriyor: Kök içleri toplandığında 25 çıkıyor, ama doğru cevabın kök içi **49**. İki sayının birbiriyle ilgisi yok.

d) Karekök hangi işlemlere dağılır?

DAĞILIR — Çarpma:
√9 · √16 = 3 · 4 = 12
√(9 · 16) = √144 = 12 → **EŞİT** ✓

DAĞILIR — Bölme:
√16 : √4 = 4 : 2 = 2
√(16 : 4) = √4 = 2 → **EŞİT** ✓

DAĞILMAZ — Toplama:
√9 + √16 = 7 ama √(9 + 16) = 5 → **FARKLI** ×

DAĞILMAZ — Çıkarma:
√16 − √9 = 4 − 3 = 1 ama √(16 − 9) = √7 ≈ 2,65 → **FARKLI** ×

Akılda tutulacak cümle: "Karekök çarpmaya ve bölmeye dağılır, toplamaya ve çıkarmaya dağılmaz."

a) Karekök toplamaya dağılmaz b) 7 c) √49 d) Çarpma ve bölmeye dağılır

5 Bir öğrenci şöyle diyor:

"√12 sayısı **yalnız √3** ile çarpıldığında sonuç doğal sayı olur."

a) Öğrenci haklı mıdır? Gerekçesiyle açıklayınız.
b) √12 sayısını doğal sayı yapan üç farklı çarpan daha yazınız ve sonuçları bulunuz.
c) √12 sayısını doğal sayı yapan çarpanlar için genel kuralı yazınız.
d) √12 · √27 işleminin sonucu doğal sayı mıdır? Hesaplayarak gösteriniz.

a) Öğrenci haklı mıdır?
Haklı değildir.

Önce √12 sayısını sadeleştirelim:
√12 = √(4 · 3) = **2√3**

Kök dışına çıkamayan çarpan **√3**'tür. Öğrencinin söylediği gibi √3 gerçekten işe yarar:
2√3 · √3 = 2 · 3 = **6** ✓

Ama √3 **tek çarpan değildir**. √3'ün her doğal sayı katı aynı işi görür; çünkü katsayı zaten doğal sayı olduğu için sonucu bozmaz.

devamı →

5 *(çözümün devamı)*

b) Üç farklı çarpan daha

2√3 ile çarpalım:
2√3 · 2√3 = (2 · 2) · 3 = **12**

3√3 ile çarpalım:
2√3 · 3√3 = (2 · 3) · 3 = **18**

5√3 ile çarpalım:
2√3 · 5√3 = (2 · 5) · 3 = **30**

Üç sonuç da doğal sayı. Üstelik sonuçlar 6, 12, 18, 30 diye **6'nın katları** olarak gidiyor.

c) Genel kural
√12 sayısı, **k** bir doğal sayı olmak üzere **k√3** biçimindeki her sayıyla çarpıldığında sonuç doğal sayı olur.

Sonuç şudur: 2√3 · k√3 = 2k · 3 = **6k**

Yani sonuç her zaman **6'nın bir katıdır**. En küçük sonuç k = 1 için **6**'dır.

Çarpan sayısı **sonsuz**dur; "kaç farklı çarpan vardır?" sorusunun cevabı da budur.

d) √12 · √27 işlemi
İki yoldan da çözebiliriz.

1. yol — kök içlerini çarpalım:
√12 · √27 = √(12 · 27) = √324
324 tam karedir: 18 · 18 = 324
√324 = **18**

2. yol — sadeleştirip çarpalım:
√12 = 2√3 · √27 = 3√3
2√3 · 3√3 = 6 · 3 = **18**

Evet, sonuç bir doğal sayıdır: 18

Bu da (c) şıkkındaki kuralı doğruluyor: √27 = 3√3 olduğuna göre k = 3'tür ve sonuç 6 · 3 = 18 çıktı ✓

a) Haklı değil b) 2√3 → 12, 3√3 → 18, 5√3 → 30 c) k√3 d) Evet, 18

2. Bölüm Soru 6–10

6 Aşağıdaki dikdörtgenin kenar uzunlukları kareköklü ifadelerle verilmiştir.



a) Kenar uzunluklarını a√b biçiminde yazınız.
b) Dikdörtgenin çevresini bulunuz.
c) Dikdörtgenin alanını bulunuz.
d) Uzun kenar kısa kenardan kaç santimetre fazladır?
e) √3 ≈ 1,73 alarak çevrenin yaklaşık değerini bulunuz.

a) Kenarları sadeleştirelim

Uzun kenar: 432 sayısının en büyük tam kare çarpanını arayalım. 432 = 144 · 3
√432 = √(144 · 3) = **12√3 cm**

Kısa kenar: 48 = 16 · 3
√48 = √(16 · 3) = **4√3 cm**

İki kenarın da kök içi **3** çıktı; bu, toplama ve çıkarmayı kolaylaştıracak.

b) Çevre
Çevre = 2 · (12√3 + 4√3)

Parantez içinde katsayılar toplanır:
12√3 + 4√3 = **16√3**

Çevre = 2 · 16√3 = **32√3 cm**

c) Alan
Alan = 12√3 · 4√3
= (12 · 4) · (√3 · √3)
= 48 · 3
= **144 cm²**

Karekök işareti kayboldu; çünkü çarpmada √3 · √3 = 3 olur.

d) Kenarlar arasındaki fark
12√3 − 4√3 = (12 − 4)√3 = **8√3 cm**

Sık yapılan hata: √432 − √48 işlemini √384 sanmak. √384 = 8√6'dır, oysa doğru sonuç 8√3'tür. Karekök çıkarma üzerine dağılmaz.

devamı →

6 *(çözümün devamı)*

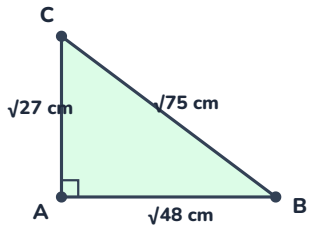
e) Çevrenin yaklaşık değeri
√3 ≈ 1,73 alalım:
32 · 1,73 = ?

Adım adım:
32 · 1 = 32
32 · 0,73 = 23,36
Toplam: 32 + 23,36 = **55,36 cm**

Mantık kontrolü: Kenarlar yaklaşık 12 · 1,73 = 20,76 cm ve 4 · 1,73 = 6,92 cm'dir.
Çevre = 2 · (20,76 + 6,92) = 2 · 27,68 = **55,36 cm** ✓

a) 12√3 ve 4√3 cm b) 32√3 cm c) 144 cm² d) 8√3 cm e) ≈ 55,36 cm

7 Aşağıdaki üçgenin kenar uzunlukları kareköklü ifadelerle verilmiştir.



a) Üç kenarı da a√b biçiminde yazınız.
b) Üçgenin çevresini bulunuz.
c) √3 ≈ 1,73 alarak çevrenin yaklaşık değerini bulunuz.
d) En uzun kenar en kısa kenardan kaç santimetre fazladır?
e) Bu üç uzunlukla gerçekten bir üçgen çizilebilir mi? Kontrol ediniz.

a) Kenarları sadeleştirelim
√48 = √(16 · 3) = **4√3 cm** (AB kenarı)
√75 = √(25 · 3) = **5√3 cm** (BC kenarı)
√27 = √(9 · 3) = **3√3 cm** (CA kenarı)
Üç kenarın da kök içi **3**; katsayılar 4, 5 ve 3'tür.

b) Çevre
Çevre, üç kenarın toplamıdır. Kök içleri aynı olduğu için katsayılar toplanır:

4√3 + 5√3 + 3√3 = (4 + 5 + 3)√3 = **12√3 cm**

c) Yaklaşık değer
√3 ≈ 1,73 alalım:
12 · 1,73 = **20,76 cm**
Yani üçgenin çevresi yaklaşık **21 santimetredir**.

devamı →

7 *(çözümün devamı)*

d) En uzun ile en kısa kenarın farkı
En uzun kenar: 5√3 cm · En kısa kenar: 3√3 cm

5√3 − 3√3 = (5 − 3)√3 = **2√3 cm**

Yaklaşık değeri: 2 · 1,73 = **3,46 cm**

e) Üçgen çizilebilir mi?
Bir üçgenin çizilebilmesi için **en uzun kenar, diğer iki kenarın toplamından küçük** olmalıdır.

En uzun kenar: **5√3**
Diğer ikisinin toplamı: 4√3 + 3√3 = **7√3**

Kök içleri aynı olduğu için katsayıları karşılaştırmak yeterlidir:
5 < 7 → 5√3 < 7√3 ✓

Evet, bu üç uzunlukla bir üçgen çizilebilir.

İlginç bir ayrıntı: Kenarların katsayıları 3, 4 ve 5'tir. $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ olduğuna göre bu bir **dik üçgendir**; şekilde de A köşesindeki açının dik olduğu görülüyor.

a) 4√3, 5√3, 3√3 b) 12√3 cm c) ≈ 20,76 cm d) 2√3 cm e) Çizilebilir

8 Kare biçimindeki iki levhadan birinin alanı **128 cm²**, diğerinin alanı **200 cm²**'dir. Levhalar bir kenarları çakışacak biçimde yan yana konulmaktadır.

a) Birinci levhanın bir kenarı kaç santimetredir?
b) İkinci levhanın bir kenarı kaç santimetredir?
c) İki levhanın kenarları yan yana konduğunda toplam uzunluk kaç santimetre olur?
d) İkinci levhanın kenarı birincininkinden kaç santimetre uzundur?
e) √2 ≈ 1,41 alarak (c) şıkkındaki uzunluğun yaklaşık değerini bulunuz.

a) Birinci levhanın kenarı
Karede **kenar = √alan**'dır.

Kenar = √128
128 = 64 · 2 olduğuna göre:
√128 = √(64 · 2) = **8√2 cm**

Kontrol: 8√2 · 8√2 = 64 · 2 = 128 ✓

b) İkinci levhanın kenarı
Kenar = √200
200 = 100 · 2 olduğuna göre:
√200 = √(100 · 2) = **10√2 cm**

Kontrol: 10√2 · 10√2 = 100 · 2 = 200 ✓

devamı →

8 *(çözümün devamı)*

c) Toplam uzunluk
İki kenar yan yana konduğunda uzunluklar **toplanır**. Kök içleri aynı olduğu için katsayılar toplanır:

$8\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = (8 + 10)\sqrt{2} = \mathbf{18\sqrt{2}\ cm}$

Uyarı: $\sqrt{128} + \sqrt{200}$ işlemini $\sqrt{328}$ sanmak yaygın bir hatadır. $\sqrt{328} \approx 18{,}1$ iken doğru sonuç $18\sqrt{2} \approx 25{,}4$'tür.

d) Kenarlar arasındaki fark
$10\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = (10 - 8)\sqrt{2} = \mathbf{2\sqrt{2}\ cm}$

Yaklaşık değeri: $2 \cdot 1{,}41 = \mathbf{2{,}82\ cm}$

e) Toplam uzunluğun yaklaşık değeri
$18\sqrt{2}$ ifadesinde $\sqrt{2}$ yerine 1,41 yazalım:

$18 \cdot 1{,}41 = ?$
$18 \cdot 1 = 18$
$18 \cdot 0{,}41 = 7{,}38$
Toplam: $18 + 7{,}38 = \mathbf{25{,}38\ cm}$

Yan yana konan iki kenarın toplam uzunluğu yaklaşık 25,4 santimetredir.

Mantık kontrolü: Kenarlar yaklaşık $8 \cdot 1{,}41 = 11{,}28$ cm ve $10 \cdot 1{,}41 = 14{,}10$ cm'dir. Toplamları $11{,}28 + 14{,}10 = \mathbf{25{,}38\ cm}$ ✓

a) $8\sqrt{2}$ cm b) $10\sqrt{2}$ cm c) $18\sqrt{2}$ cm d) $2\sqrt{2}$ cm e) ≈ 25,38 cm

9 Bir marangoz **$\sqrt{162}$ cm** ve **$\sqrt{98}$ cm** uzunluğundaki iki çubuğu uç uca ekliyor.

Yanındaki çırak, "Toplam uzunluk **$\sqrt{260}$ cm** olur; çünkü kök içlerini topladım." diyor.

a) Çubukların uzunluklarını $a\sqrt{b}$ biçiminde yazınız.
b) Uç uca eklenen çubukların toplam uzunluğunu bulunuz.
c) Çırak haklı mıdır? İki sonucu karşılaştırarak gösteriniz.
d) Uzun çubuk kısa çubuktan kaç santimetre fazladır?

a) Çubukları sadeleştirelim
$\sqrt{162} = \sqrt{(81 \cdot 2)} = \mathbf{9\sqrt{2}\ cm}$
$\sqrt{98} = \sqrt{(49 \cdot 2)} = \mathbf{7\sqrt{2}\ cm}$

İkisinin de kök içi **2**; toplama yapılabilir.

b) Toplam uzunluk
$9\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = (9 + 7)\sqrt{2} = \mathbf{16\sqrt{2}\ cm}$

Yaklaşık değeri: $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ alınırsa $16 \cdot 1{,}41 = \mathbf{22{,}56\ cm}$

devamı →

9 *(çözümün devamı)*

c) Çırak haklı mıdır?
Haklı değildir.

Çırak kök içlerini toplamış: 162 + 98 = 260. Oysa **karekök toplama üzerine dağılmaz**.

İki sonucu aynı biçime getirip karşılaştıralım. Doğru sonucu tek karekök hâline çevirelim:
16√2 = √(256 · 2) = **√512**

Şimdi karşılaştıralım:
Doğru: **√512** · Çırağın iddiası: **√260**

512 ile 260 eşit olmadığına göre iki sonuç da eşit değildir.

Yaklaşık değerlerle de görelim:
√512 ≈ **22,6 cm** · √260 ≈ **16,1 cm**

Arada yaklaşık **6,5 cm**'lik bir fark var; bu, atölyede ciddi bir hataya yol açardı.

Hatanın sezgisel açıklaması: Çubukların kendileri yaklaşık 12,7 cm ve 9,9 cm'dir. Toplamları en az 12,7 cm'den büyük olmalıdır ve gerçekten 22,6 cm çıkıyor. Çırağın bulduğu 16,1 cm ise iki çubuğun toplamı için **çok küçüktür**; bu bile sonucun yanlış olduğunu gösterir.

d) Çubuklar arasındaki fark
9√2 − 7√2 = (9 − 7)√2 = **2√2 cm**

Yaklaşık değeri: 2 · 1,41 = **2,82 cm**

a) 9√2 ve 7√2 cm b) 16√2 cm c) Haklı değil (√512 ≠ √260) d) 2√2 cm

10 Selin, **√12 + √27** işlemini şöyle çözmüştür:

> "Kök içlerini topladım: 12 + 27 = 39
> O hâlde sonuç **√39**'dur."

a) Selin'in hatasını açıklayınız.
b) İşlemin doğru sonucunu bulunuz.
c) Doğru sonucu tek bir karekök biçiminde yazıp Selin'in sonucuyla karşılaştırınız.
d) Bu tür işlemlerde ilk adım ne olmalıdır?

a) Hata nerede?
Selin kök içlerini toplamıştır. **Karekök toplama üzerine dağılmaz**; yani √a + √b, √(a + b) değildir.

Toplama ve çıkarmada yapılabilecek tek şey, **kök içleri aynı** olan terimlerin katsayılarını toplamaktır. Selin bu adımı hiç düşünmemiş, doğrudan kök içlerini birleştirmiştir.

devamı →

10 *(çözümün devamı)*

b) Doğru çözüm
Önce her terimi sadeleştirelim:
√12 = √(4 · 3) = **2√3**
√27 = √(9 · 3) = **3√3**

İkisinin de kök içi **3** oldu; artık katsayılar toplanabilir:
2√3 + 3√3 = (2 + 3)√3 = **5√3**

c) Karşılaştırma
Doğru sonucu tek karekök biçimine çevirelim:
5√3 = √(25 · 3) = **√75**

Selin'in bulduğu: **√39**
Doğru sonuç: **√75**

75 ile 39 eşit olmadığına göre iki sonuç da eşit değildir.

Yaklaşık değerlerle:
√75 ≈ **8,66** · √39 ≈ **6,24**

Aradaki fark yaklaşık **2,4**'tür.

Hızlı kontrol: √12 ≈ 3,46 ve √27 ≈ 5,20'dir; toplamları ≈ 8,66. Bu değer doğru sonuçla uyuşuyor, Selin'in sonucuyla uyuşmuyor ✓

d) İlk adım ne olmalı?
Kareköklü ifadelerde toplama ya da çıkarma yapılırken **ilk adım her zaman her terimi ayrı ayrı a√b biçiminde sadeleştirmektir**.

Sadeleştirmeden sonra:
• Kök içleri aynıysa katsayılar toplanır.
• Kök içleri farklıysa terimler ayrı ayrı yazılır, ifade aynen kalır.

Selin bu ilk adımı atlasaydı bile, kök içlerini toplamak yine yanlış olurdu; çünkü öyle bir kural yoktur.

a) Kök içleri toplanmaz b) 5√3 c) √75 ≠ √39 d) Önce her terimi sadeleştir

3. Bölüm Soru 11–15

11 Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) √108 + √75 − √48 + √12
b) 3√20 − √45 + 2√80
c) (a) ve (b) sonuçlarından hangisi büyüktür? Karşılaştırmanızı gösteriniz.
d) (a) ve (b) sonuçlarının çarpımı bir doğal sayı mıdır?

a) √108 + √75 − √48 + √12
Dört terimi de sadeleştirelim:
√108 = √(36 · 3) = **6√3**
√75 = √(25 · 3) = **5√3**
√48 = √(16 · 3) = **4√3**
√12 = √(4 · 3) = **2√3**

Dördünün de kök içi 3; katsayılarla işlem yapalım:
(6 + 5 − 4 + 2)√3 = (11 − 4 + 2)√3 = **9√3**

b) 3√20 − √45 + 2√80
Terimleri sadeleştirelim:
3√20 = 3 · 2√5 = **6√5**
√45 = √(9 · 5) = **3√5**
2√80 = 2 · 4√5 = **8√5**

Katsayılarla işlem:
(6 − 3 + 8)√5 = **11√5**

Uyarı: Birinci ve üçüncü terimlerde dıştaki katsayı ile sadeleştirmeden çıkan sayıyı çarpmayı unutmamak gerekir.

c) Hangisi büyük?
Kök içleri farklı olduğu için katsayılara bakarak karar verilemez. İkisini de tek karekök biçimine getirelim:

9√3 = √(81 · 3) = **√243**
11√5 = √(121 · 5) = **√605**

Kök içleri: 605 > 243

(b) şıkkının sonucu büyüktür: 11√5 > 9√3

Yaklaşık kontrol: 9√3 ≈ 9 · 1,73 = 15,57 · 11√5 ≈ 11 · 2,24 = 24,64 ✓

d) Sonuçların çarpımı
9√3 · 11√5 = (9 · 11) · √(3 · 5) = **99√15**

15 sayısının tam kare çarpanı yoktur (15 = 3 · 5), o hâlde karekök işareti kaybolmaz.

Çarpım bir doğal sayı değildir: 99√15

devamı →

11 *(çözümün devamı)*

Neden doğal sayı çıkmadı? Çarpımın doğal sayı olması için kök içlerinin çarpımının **tam kare** olması gerekirdi. Burada 3 · 5 = 15 tam kare değildir.

Çarpımın doğal sayı olması isteniyorsa ikinci ifadenin kök içi de **3** olmalıydı; örneğin 9√3 · 11√3 = 99 · 3 = **297** bir doğal sayıdır.

a) 9√3 b) 11√5 c) 11√5 büyüktür d) Hayır, 99√15

12 Bir öğrenci, **payı 1 paydası √2 olan kesir** ile **payı √2 paydası 2 olan kesir** sayılarının **farklı** olduğunu söylemektedir.

a) İki ifadenin eşit olup olmadığını gösteriniz.
b) Öğrenci haklı mıdır?
c) √2 ≈ 1,41 alarak iki ifadenin yaklaşık değerini ayrı ayrı hesaplayınız.
d) Hangi yazılış hesap yapmak için daha kullanışlıdır? Gerekçelendiriniz.

a) İki ifade eşit midir?
Birinci ifadenin pay ve paydasını **√2** ile genişletelim. Pay ve payda aynı sayıyla çarpıldığı için kesrin değeri **değişmez**:

Pay: 1 · √2 = **√2**
Payda: √2 · √2 = **2**

Sonuç: payı **√2**, paydası **2** olan kesir.

Bu, tam olarak ikinci ifadedir.

İki ifade birbirine eşittir.

b) Öğrenci haklı mıdır?
Haklı değildir.

İki ifade aynı sayının **iki farklı yazılışı**dır. Görünüşleri farklı olduğu için farklı sanılıyor; ama aralarındaki işlem yalnızca bir **genişletme**dir.

Bu durum kesirlerde de vardır: payı 1 paydası 2 olan kesir ile payı 2 paydası 4 olan kesir aynı sayıdır; yazılışları farklıdır.

c) Yaklaşık değerler

Birinci yazılış: payı 1, paydası √2
√2 ≈ 1,41 olduğuna göre 1 sayısını 1,41'e bölmemiz gerekir:
1 : 1,41 ≈ **0,709**

Bu bölme işlemi elde yapılırken zordur; bölen ondalık bir sayıdır.

İkinci yazılış: payı √2, paydası 2
1,41 : 2 = **0,705**

Bu bölme çok daha kolaydır; yalnız ikiye bölmek yeter.

İki sonuç arasındaki küçük fark (0,709 ile 0,705), √2 yerine yuvarlanmış bir değer kullanmaktan gelir. Gerçek değer yaklaşık **0,7071**'dir.

devamı →

12 *(çözümün devamı)*

d) Hangisi daha kullanışlı?
İkinci yazılış (paydası doğal sayı olan) daha kullanışlıdır.

Üç sebebi vardır:

1. Hesap kolaylığı: Bir sayıyı doğal sayıya bölmek, ondalık bir sayıya bölmekten çok daha kolaydır.

2. Karşılaştırma kolaylığı: Paydaları doğal sayı olan kesirler ortak paydaya getirilerek kolayca karşılaştırılır.

3. Ortak yazım: Herkesin aynı biçimi kullanması, sonuçların karşılaştırılmasını kolaylaştırır. Bu yüzden "paydayı doğal sayı yapmak" bir yazım kuralı hâline gelmiştir.

Yine de unutma: Bu bir **sadeleştirme**dir, sayının değeri değişmez.

a) Eşittirler b) Haklı değil c) ≈ 0,709 ve 0,705 d) Paydası doğal sayı olan

13 Aşağıdaki altı işlem veriliyor.

I. $\sqrt{8} + \sqrt{18}$
II. $\sqrt{50}$
III. $\sqrt{72} - \sqrt{2}$
IV. $2\sqrt{32} - \sqrt{98}$
V. $\sqrt{200} - \sqrt{98} + \sqrt{2}$
VI. $3\sqrt{8} - \sqrt{8}$

a) Her işlemin sonucunu en sade hâliyle bulunuz.
b) Aynı sonucu veren işlemleri gruplayınız.
c) En büyük ve en küçük sonucu veren işlemler hangileridir?
d) Altı işlemin de sonucunun kök içi neden aynı çıktı? Açıklayınız.

a) Sonuçlar

I. $\sqrt{8} + \sqrt{18}$
$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ · $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
$2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \mathbf{5\sqrt{2}}$

II. $\sqrt{50}$
$\sqrt{50} = \sqrt{(25 \cdot 2)} = \mathbf{5\sqrt{2}}$

III. $\sqrt{72} - \sqrt{2}$
$\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$
$6\sqrt{2} - \sqrt{2} = (6 - 1)\sqrt{2} = \mathbf{5\sqrt{2}}$

IV. $2\sqrt{32} - \sqrt{98}$
$2\sqrt{32} = 2 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ · $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$
$8\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = \mathbf{\sqrt{2}}$

devamı →

13 *(çözümün devamı)*

V. √200 − √98 + √2
√200 = 10√2 · √98 = 7√2
10√2 − 7√2 + √2 = (10 − 7 + 1)√2 = **4√2**

VI. 3√8 − √8
√8 = 2√2 olduğuna göre 3√8 = 6√2 ve √8 = 2√2
6√2 − 2√2 = **4√2**

b) Gruplama
5√2 verenler: I, II, III
4√2 verenler: V, VI
√2 veren: IV

Üç grup oluştu. Dikkat çekici olan, görünüşleri birbirinden çok farklı olan üç işlemin (I, II, III) aynı sonucu vermesidir.

c) En büyük ve en küçük
Sonuçların hepsinin kök içi aynı (√2) olduğu için yalnız katsayılara bakmak yeterlidir: 5, 5, 5, 1, 4, 4

En büyük sonuç: 5√2 → I, II ve III işlemleri
En küçük sonuç: √2 → IV işlemi

Yaklaşık değerleri: 5√2 ≈ 7,07 · 4√2 ≈ 5,66 · √2 ≈ 1,41

d) Kök içi neden hep 2 çıktı?
Çünkü işlemlerde geçen bütün sayılar sadeleştirildiğinde **√2'nin katı** hâline geliyor:

√8 = 2√2 · √18 = 3√2 · √32 = 4√2 · √50 = 5√2 · √72 = 6√2 · √98 = 7√2 · √200 = 10√2

Bu sayıların hepsinin ortak özelliği şudur: kök içleri **2 · (tam kare)** biçimindedir.
8 = 2 · 4 · 18 = 2 · 9 · 32 = 2 · 16 · 50 = 2 · 25 · 72 = 2 · 36 · 98 = 2 · 49 · 200 = 2 · 100

Bu yüzden hepsi aynı kök içine indirgeniyor ve toplanıp çıkarılabiliyorlar. Kök içlerinden biri örneğin 3 · (tam kare) biçiminde olsaydı, o terim diğerleriyle birleşemez ve sonuçta ayrı bir terim olarak kalırdı.

b) {I, II, III} = 5√2 · {V, VI} = 4√2 · {IV} = √2

14 Bir **eşkenar üçgenin** bir kenarı **√48 cm**, bir **karenin** bir kenarı **√27 cm**'dir.

a) İki kenar uzunluğunu da a√b biçiminde yazınız.
b) Eşkenar üçgenin çevresini bulunuz.
c) Karenin çevresini bulunuz.
d) İki çevreyi karşılaştırınız.
e) Üçgenin bir kenarı karenin bir kenarından kaç santimetre uzundur?

a) Kenarları sadeleştirelim
√48 = √(16 · 3) = **4√3 cm** (üçgenin kenarı)
√27 = √(9 · 3) = **3√3 cm** (karenin kenarı)

İkisinin de kök içi **3**; bu, karşılaştırmayı kolaylaştıracak.

b) Eşkenar üçgenin çevresi
Eşkenar üçgenin üç kenarı da eşittir; çevre bir kenarın **3 katıdır**:

3 · 4√3 = **12√3 cm**

Katsayı 3 ile 4 çarpıldı; kök içi değişmedi.

c) Karenin çevresi
Karenin dört kenarı da eşittir; çevre bir kenarın **4 katıdır**:

4 · 3√3 = **12√3 cm**

d) Çevrelerin karşılaştırılması
Üçgenin çevresi: **12√3 cm**
Karenin çevresi: **12√3 cm**

İki çevre birbirine eşittir.

Bu şaşırtıcı bir sonuç değildir; sayıları inceleyelim:
Üçgen: 3 kenar × 4√3 = 12√3
Kare: 4 kenar × 3√3 = 12√3

Kenar sayıları ile katsayılar **yer değiştirmiş** (3 ile 4, 4 ile 3); çarpımları aynı olduğu için çevreler de eşit çıktı.

Yaklaşık değeri: √3 ≈ 1,73 alınırsa 12 · 1,73 = **20,76 cm**

e) Kenarlar arasındaki fark
4√3 − 3√3 = (4 − 3)√3 = **√3 cm**

Yaklaşık değeri: **1,73 cm**

Sonuç: Üçgenin kenarı karenin kenarından √3 cm (yaklaşık 1,73 cm) uzundur; ama üçgenin kenar sayısı daha az olduğu için iki şeklin çevresi eşit çıkmıştır.

a) 4√3 ve 3√3 cm b) 12√3 cm c) 12√3 cm d) Eşit e) √3 cm

15 Aşağıdaki koşulların tamamını sağlayan bir işlem yazınız.

- İşlem **üç terimli** bir toplama-çıkarma işlemi olmalıdır.
- Terimler **√a, √b, √c** biçiminde (katsayısız) verilmeli ve kök içleri birbirinden farklı görünmelidir.
- Sadeleştirildiğinde üç terimin de kök içi **aynı** olmalıdır.
- İşlemin sonucu **0** olmalıdır.

a) İşleminizi yazınız.
b) Adım adım çözünüz.
c) Sonucun 0 olduğunu gösteriniz.
d) Sonucu 0 yapmak için sayıları nasıl seçtiğinizi açıklayınız.
e) Aynı yöntemle sonucu 0 olan başka bir işlem daha yazınız.

Bu soruda tek bir doğru cevap yoktur; koşulları sağlayan her işlem kabul edilir. Aşağıda örnek bir çözüm verilmiştir.

a) Örnek işlem
√8 + √18 − √50
Üç terimin kök içleri 8, 18 ve 50; ilk bakışta birbirinden farklı görünüyorlar.

b) Çözüm
Her terimi ayrı ayrı sadeleştirelim:

√8 = √(4 · 2) = **2√2**
√18 = √(9 · 2) = **3√2**
√50 = √(25 · 2) = **5√2**

Üçünün de kök içi **2** oldu.

c) Sonucun 0 olduğunu gösterelim
Katsayılarla işlem yapalım:
2√2 + 3√2 − 5√2 = (2 + 3 − 5)√2

Parantez içi: 2 + 3 − 5 = **0**

Sonuç: 0 · √2 = **0**

Katsayıların toplamı sıfır olduğu için ifade tamamen yok oldu.

d) Sayıları nasıl seçtim?

1. adım — Ortak kök içini seçtim. Kök içi olarak **2**'yi seçtim (tam kare çarpanı olmayan herhangi bir sayı olabilirdi: 3, 5, 6, 7, ...).

2. adım — Katsayıları seçtim. Toplamı sıfır yapacak katsayılar gerekiyordu. En kolayı, ilk ikisinin toplamının üçüncüye eşit olmasıdır:
2 + 3 = 5 ✓

devamı →

15 *(çözümün devamı)*

3. adım — Katsayıları kök içine aldım. a√2 ifadesini √(a^2 · 2) biçiminde yazdım:
2√2 = √(4 · 2) = **√8**
3√2 = √(9 · 2) = **√18**
5√2 = √(25 · 2) = **√50**

Böylece terimler katsayısız göründü ve kök içleri birbirinden farklı çıktı.

e) Başka bir örnek
Aynı yöntemi kök içi **3** ve katsayılar **1, 3, 4** ile uygulayalım (1 + 3 = 4 ✓):

1√3 = √3 · 3√3 = √27 · 4√3 = √48

İşlem: **√3 + √27 − √48**

Kontrol: √3 + 3√3 − 4√3 = (1 + 3 − 4)√3 = **0** ✓

Genel yöntem: Toplamı sıfır olan katsayılar seç, her birini istediğin ortak kök içiyle birlikte kök içine al. Böylece istediğin kadar farklı işlem üretebilirsin.

Örnek: √8 + √18 − √50 = 2√2 + 3√2 − 5√2 = 0