KONU ANLATIMLI SORU ÇÖZÜMLERİ

Sonucu Doğal Sayı Yapan Çarpanlar, Kareköklü İfadelerde Toplama ve Çıkarma

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 — Sonucu doğal sayı yapan çarpanlar

√72 kareköklü ifadesi veriliyor.
a) İfadeyi a√b biçiminde en sade hâliyle yazınız.
b) Kök dışına çıkamayan çarpanı nedir?
c) √72 hangi sayılarla çarpıldığında sonuç doğal sayı olur? En küçük üç çarpanı yazınız.
d) √72 · 3√2 işleminin sonucunu bulunuz.
e) **72** sayısını hangi en küçük doğal sayı ile çarparsak sonuç tam kare olur?

1 a) En sade hâli

72 sayısının tam kare çarpanlarını arayalım: 4, 9 ve 36 sayıları 72'yi tam böler. En büyüğü **36**'dır.

√72 = √(36 · 2) = **6√2**

Kök içinde kalan 2 sayısının tam kare çarpanı yoktur; ifade en sade hâlindedir.

2 b) Kök dışına çıkamayan çarpan

6√2 ifadesinde 6 katsayı, **√2** ise kök dışına çıkamayan çarpandır.

Cevap: √2

Bu çarpan, ifadeyi doğal sayı yapmak için gereken "anahtar"dır: √2 · √2 = 2 olduğu için karekök işareti ancak √2 ile çarpılınca kaybolur.

3 c) Sonucu doğal sayı yapan çarpanlar

√2'nin bütün doğal sayı katları işe yarar. En küçük üçü:

√2, 2√2, 3√2

Kontrol edelim:

- 6√2 · √2 = 6 · 2 = **12** ✓
- 6√2 · 2√2 = 12 · 2 = **24** ✓
- 6√2 · 3√2 = 18 · 2 = **36** ✓

Üç sonuç da doğal sayı çıktı ve 12'nin katları olarak ilerliyor.

Not: Bu çarpanlar başka biçimlerde de yazılabilir: 2√2 = √8, 3√2 = √18. Yani √72 · √18 = 6√2 · 3√2 = **36** da doğal sayıdır.

4 d) √72 · 3√2 işlemi

√72 = 6√2 olduğunu biliyoruz.

6√2 · 3√2 = (6 · 3) · (√2 · √2) = 18 · 2 = **36**

İkinci yoldan da bulabiliriz:

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 1 **Sonucu doğal sayı yapan çarpanlar** (devam)

$3\sqrt{2} = \sqrt{18}$

$\sqrt{72} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{(72 \cdot 18)} = \sqrt{1296}$

1296 sayısı tam karedir: $36 \cdot 36 = 1296$

$\sqrt{1296} = \mathbf{36}$ ✓

5 **e) 72'yi tam kare yapan en küçük doğal sayı**

Bu soru (c) şıkkından farklıdır: Burada **kök içindeki 72 sayısı** bir doğal sayıyla çarpılıyor.

72 sayısını asal çarpanlarına ayıralım:

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{2^3 \cdot 3^2}$

Bir sayının tam kare olması için asal çarpanlarının **üslerinin çift** olması gerekir.

- 3 çarpanının üssü **2**, yani çift ✓
- 2 çarpanının üssü **3**, yani tek ×

Üssü çift yapmak için bir tane daha **2** gerekiyor.

Cevap: En küçük doğal sayı 2'dir.

Kontrol: $72 \cdot 2 = 144 = 12^2$ ✓

Aynı sonucu şöyle de görebiliriz: $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ idi; kök içindeki 2'yi yok etmek için 2 ile çarpmak gerekir.

Sonuç: a) $6\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ d) 36 e) 2

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Paydayı doğal sayı yapma**

Aşağıdaki kesirlerin paydalarını doğal sayı yapınız.
a) Payı 12, paydası $\sqrt{6}$ olan kesir
b) Payı 1, paydası $3\sqrt{5}$ olan kesir
c) Payı $2\sqrt{3}$, paydası $\sqrt{2}$ olan kesir
d) (a) şıkkında bulduğunuz sonucun karesini alınız.

1 **a) Payı 12, paydası $\sqrt{6}$**

Paydayı doğal sayı yapmak için pay ve paydayı **$\sqrt{6}$** ile çarpalım:

Pay: $12 \cdot \sqrt{6} = 12\sqrt{6}$

Payda: $\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 6$

Sonuç: $12\sqrt{6} : 6 = \mathbf{2\sqrt{6}}$

Kontrol: $2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 2 \cdot 6 = 12$ ✓ Bölümle böleni çarpınca bölüneni elde ettik.

2 **b) Payı 1, paydası $3\sqrt{5}$**

Paydada hem katsayı (3) hem karekök ($\sqrt{5}$) var. Yalnız **karekökle** genişletmek yeterlidir:

Pay: $1 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5}$

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 2 **Paydayı doğal sayı yapma** (devam)

Payda: $3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 3 \cdot 5 = 15$

Sonuç: **$\sqrt{5}$ bölü 15**

Uyarı: Pay ve paydayı $3\sqrt{5}$ ile çarpmak da doğru sonuç verir, ama sayılar gereksiz büyür ve sonra sadeleştirmek gerekir. En pratik yol yalnız kareköklü kısımla genişletmektir.

3 **c) Payı $2\sqrt{3}$, paydası $\sqrt{2}$**

Pay ve paydayı **$\sqrt{2}$** ile çarpalım:

Pay: $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{6}$

Payda: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

Sonuç: $2\sqrt{6} : 2 =$ **$\sqrt{6}$**

Burada payda ile paydaki 2 sayıları sadeleşti ve çok sade bir sonuç çıktı.

Kontrol: $\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ✓

4 **d) (a) şıkkındaki sonucun karesi**

(a) şıkkında **$2\sqrt{6}$** bulmuştuk. Karesini alalım:

$(2\sqrt{6})^2 = 2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} = (2 \cdot 2) \cdot (\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}) = 4 \cdot 6 =$ **24**

Kareköklü bir ifadenin karesi her zaman karekök işaretini yok eder:

$(a\sqrt{b})^2 = a^2 \cdot b$

İkinci yol: $2\sqrt{6} = \sqrt{24}$ olduğuna göre $(\sqrt{24})^2 =$ **24** ✓

Bu sonuç, (a) şıkkındaki kesrin karesinin de 24 olduğunu söyler: payı 144, paydası 6 olan kesir 24'e eşittir ✓

Sonuç: a) $2\sqrt{6}$ b) $\sqrt{5}$ bölü 15 c) $\sqrt{6}$ d) 24

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Kök içlerini eşitleyerek toplama ve çıkarma**

Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.
a) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{8}$
b) $2\sqrt{27} - \sqrt{75} + \sqrt{12}$
c) $\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{125}$
d) $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{6}$
e) Bu dört sonuçtan hangisi sıfırdır?

1 **a) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{8}$**

Her terimi ayrı ayrı sadeleştirelim:

$\sqrt{18} = \sqrt{(9 \cdot 2)} =$ **$3\sqrt{2}$**

$\sqrt{50} = \sqrt{(25 \cdot 2)} =$ **$5\sqrt{2}$**

$\sqrt{8} = \sqrt{(4 \cdot 2)} =$ **$2\sqrt{2}$**

Üçünün de kök içi **2** oldu; katsayılarla işlem yapalım:

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Kök içlerini eşitleyerek toplama ve çıkarma** (devam)

$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = (3 + 5 - 2)\sqrt{2} = \mathbf{6\sqrt{2}}$

2 **b) $2\sqrt{27} - \sqrt{75} + \sqrt{12}$**

Terimleri sadeleştirelim:

$2\sqrt{27} = 2 \cdot 3\sqrt{3} = \mathbf{6\sqrt{3}}$

$\sqrt{75} = \sqrt{(25 \cdot 3)} = \mathbf{5\sqrt{3}}$

$\sqrt{12} = \sqrt{(4 \cdot 3)} = \mathbf{2\sqrt{3}}$

Katsayılarla işlem:

$6\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = (6 - 5 + 2)\sqrt{3} = \mathbf{3\sqrt{3}}$

Uyarı: Birinci terimde katsayı 2 ile sadeleştirmeden çıkan 3 çarpılmalıdır: $2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$. Yalnız $3\sqrt{3}$ yazmak sık yapılan bir hatadır.

3 **c) $\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{125}$**

Terimleri sadeleştirelim:

$\sqrt{45} = \sqrt{(9 \cdot 5)} = \mathbf{3\sqrt{5}}$

$\sqrt{20} = \sqrt{(4 \cdot 5)} = \mathbf{2\sqrt{5}}$

$\sqrt{125} = \sqrt{(25 \cdot 5)} = \mathbf{5\sqrt{5}}$

Katsayılarla işlem:

$3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = (3 + 2 - 5)\sqrt{5} = 0 \cdot \sqrt{5} = \mathbf{0}$

Katsayıların toplamı sıfır olduğu için ifade tamamen yok oldu.

4 **d) $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{6}$**

Terimleri sadeleştirelim:

$\sqrt{24} = \sqrt{(4 \cdot 6)} = \mathbf{2\sqrt{6}}$

$\sqrt{54} = \sqrt{(9 \cdot 6)} = \mathbf{3\sqrt{6}}$

$\sqrt{6} = \mathbf{\sqrt{6}}$ (katsayısı 1)

Katsayılarla işlem:

$2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - \sqrt{6} = (2 + 3 - 1)\sqrt{6} = \mathbf{4\sqrt{6}}$

Üçüncü terimin katsayısının 1 olduğunu unutmamak gerekir; 0 sayılırsa sonuç yanlışlıkla $5\sqrt{6}$ çıkar.

5 **e) Hangisi sıfır?**

Bulduğumuz sonuçlar:

a) $\mathbf{6\sqrt{2}}$ · b) $\mathbf{3\sqrt{3}}$ · c) $\mathbf{0}$ · d) $\mathbf{4\sqrt{6}}$

Cevap: (c) şıkkının sonucu sıfırdır.

Neden sıfır çıktı? Çünkü üç terimin de kök içi aynıydı ($\sqrt{5}$) ve katsayıların toplamı $3 + 2 - 5 = 0$ oldu.

Bu tür işlemlerde sonucun sıfır olup olmadığını **katsayılara bakarak** anlayabilirsin: kök içleri eşitlendikten sonra katsayıların toplamı sıfırsa sonuç sıfırdır.

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 3 **Kök içlerini eşitleyerek toplama ve çıkarma** (devam)

Dört sonucu büyüklük sırasına da koyabiliriz. Kök içine alalım:

$6\sqrt{2} = \sqrt{72}$ · $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$ · $4\sqrt{6} = \sqrt{96}$

Sıralama: $\mathbf{0 < 3\sqrt{3} < 6\sqrt{2} < 4\sqrt{6}}$

Sonuç: a) $6\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{3}$ c) 0 d) $4\sqrt{6}$ e) (c) şıkkı

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Dikdörtgende çevre, alan ve kenar farkı**

Bir dikdörtgenin uzun kenarı **$\sqrt{200}$ cm**, kısa kenarı **$\sqrt{72}$ cm**'dir.
a) Kenar uzunluklarını $a\sqrt{b}$ biçiminde yazınız.
b) Dikdörtgenin çevresini bulunuz.
c) Dikdörtgenin alanını bulunuz.
d) Uzun kenar kısa kenardan kaç santimetre fazladır?
e) $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ alarak çevrenin yaklaşık değerini bulunuz.

1 **a) Kenarları sadeleştirelim**

Uzun kenar:

$\sqrt{200} = \sqrt{(100 \cdot 2)} = \mathbf{10\sqrt{2}}$ **cm**

Kısa kenar:

$\sqrt{72} = \sqrt{(36 \cdot 2)} = \mathbf{6\sqrt{2}}$ **cm**

İki kenarın da kök içi **2** çıktı; bu, toplama ve çıkarma işlemlerini kolaylaştıracak.

Tutarlılık kontrolü: $10\sqrt{2} > 6\sqrt{2}$ olduğuna göre uzun kenar gerçekten uzun ✓

2 **b) Çevre**

Çevre = 2 · (uzun kenar + kısa kenar)

Önce parantez içindeki **toplama**yı yapalım. Kök içleri aynı olduğu için katsayılar toplanır:

$10\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = (10 + 6)\sqrt{2} = \mathbf{16\sqrt{2}}$

Şimdi 2 ile çarpalım:

$2 \cdot 16\sqrt{2} = \mathbf{32\sqrt{2}}$ **cm**

Katsayı 2 ile 16 çarpıldı; kök içi değişmedi.

3 **c) Alan**

Alan = uzun kenar · kısa kenar

Burada **çarpma** yapılıyor; katsayılar kendi arasında, kök içleri kendi arasında çarpılır:

$10\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = (10 \cdot 6) \cdot (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = 60 \cdot 2 = \mathbf{120}$ **cm²**

Karekök işareti kayboldu ve sonuç doğal sayı çıktı.

Karşılaştıralım: Çevrede karekök kaldı ($32\sqrt{2}$), alanda kayboldu (120). Sebebi, toplamada kök içinin değişmemesi ama çarpmada $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ olmasıdır.

devamı →

ÇÖZÜMLÜ SORU 4 **Dikdörtgende çevre, alan ve kenar farkı** (devam)

4 **d) Kenarlar arasındaki fark**

Fark bir **çıkarma** işlemidir; kök içleri aynı olduğu için katsayılar çıkarılır:

$10\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = (10 - 6)\sqrt{2} = \mathbf{4\sqrt{2}\ cm}$

Sık yapılan hata: $\sqrt{200} - \sqrt{72}$ işlemini $\sqrt{128}$ sanmak.

Kontrol edelim: $\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$, oysa doğru sonuç $4\sqrt{2}$'dir. İki sayı farklıdır.

Kural: **Karekök çıkarma üzerine dağılmaz.**

5 **e) Çevrenin yaklaşık değeri**

Çevre $32\sqrt{2}$ cm idi. $\sqrt{2}$ yerine 1,41 yazalım:

$32 \cdot 1{,}41 = ?$

Adım adım hesaplayalım:

$32 \cdot 1 = 32$

$32 \cdot 0{,}41 = 13{,}12$

Toplam: $32 + 13{,}12 = \mathbf{45{,}12\ cm}$

Çevre yaklaşık 45 santimetredir.

Mantık kontrolü: Kenarlar yaklaşık $10 \cdot 1{,}41 = 14{,}1$ cm ve $6 \cdot 1{,}41 = 8{,}46$ cm'dir. Çevre $2 \cdot (14{,}1 + 8{,}46) = 2 \cdot 22{,}56 = 45{,}12$ cm ✓ İki yol da aynı sonucu verdi.

Sonuç: a) $10\sqrt{2}$ cm ve $6\sqrt{2}$ cm b) $32\sqrt{2}$ cm c) 120 cm² d) $4\sqrt{2}$ cm e) ≈ 45,12 cm