KONU ANLATIMI · CEVAPLI

Sonucu Doğal Sayı Yapan Çarpanlar, Kareköklü İfadelerde Toplama ve Çıkarma

Kazanımlar: MAT.8.2. Kareköklü bir ifade ile çarpıldığında sonucu doğal sayı yapan çarpanları belirleyebilme · MAT.8.2. Kareköklü ifadelerde toplama ve çıkarma işlemlerini yapabilme

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

Sonucu Doğal Sayı Yapan Çarpanlar

Kareköklü bir ifade bir sayıyla çarpıldığında sonucun **doğal sayı** olması isteniyorsa, önce ifade en sade hâline, yani **a√b** biçimine getirilir.

a√b ifadesinde **kök dışına çıkamayan çarpan √b**'dir. Sonucun doğal sayı olması için ifadenin, içinde **√b** bulunan bir sayıyla çarpılması gerekir.

Bunun sebebi **√b · √b = b** eşitliğidir: Aynı kareköklü ifade kendisiyle çarpıldığında karekök işareti kaybolur.

√b sayısının bütün doğal sayı katları da (**√b, 2√b, 3√b, 4√b, ...**) aynı işi görür. Yani sonucu doğal sayı yapan çarpan **tek değildir**; sonsuz çoktur.



Kareköklü bir ifadeyi doğal sayı yapan çarpanların nasıl bulunacağını gösteren akış şeması. İfade a√b biçimine getirilir, kök dışına çıkamayan çarpan belirlenir ve onun katları yazılır.

ÖRNEK **√12 sayısını doğal sayı yapan çarpanları bulalım.**

Önce en sade hâline getirelim:
√12 = √(4 · 3) = **2√3**

Kök dışına çıkamayan çarpan: **√3**

O hâlde √12, **√3'ün doğal sayı katlarıyla** çarpıldığında sonuç doğal sayı olur:
√3, 2√3, 3√3, 4√3, ...

Kontrol edelim:
- √12 · √3 = 2√3 · √3 = 2 · 3 = **6**
- √12 · 2√3 = 2√3 · 2√3 = 4 · 3 = **12**
- √12 · 3√3 = 2√3 · 3√3 = 6 · 3 = **18**

Üç çarpımda da sonuç doğal sayı çıktı. Dikkat edilirse sonuçlar 6, 12, 18 diye **6'nın katları** olarak ilerliyor.

İfade	a√b Biçimi	Kök Dışına Çıkamayan Çarpan	Örnek İki Çarpan	Sonuçlar
√50	5√2	**√2**	√2 ve 2√2	10 ve 20
√27	3√3	**√3**	√3 ve 2√3	9 ve 18
√60	2√15	**√15**	√15 ve 2√15	30 ve 60
√80	4√5	**√5**	√5 ve 3√5	20 ve 60
√5	√5	**√5**	√5 ve 2√5	5 ve 10

Tabloyu okuyalım. Her satırda kök dışına çıkamayan çarpan, ifadenin **en sade hâlindeki kök içi**dir.

Üçüncü satır dikkat çekicidir: √60 = 2√15'tir ve kök dışına çıkamayan çarpan **√15**'tir. Buradaki 15 sayısı asal değildir (15 = 3 · 5); ama tam kare çarpanı olmadığı için kök içinde kalır.

Son satırda ise ifade zaten en sade hâldedir: √5 sayısının tam kare çarpanı yoktur, o hâlde katsayısı 1'dir.

En küçük çarpan neden √b'dir? Çünkü daha küçük bir kareköklü ifadeyle çarpıldığında kök içi tam kare olmaz. Örneğin √50 sayısını √2'den küçük bir kareköklü ifadeyle, diyelim ki başka bir kök içiyle çarparsak, çarpımın kök içi tam kare çıkmaz ve sonuç doğal sayı olmaz.

NOT **Çarpan tek değildir; sonsuz çoktur.**

"√12 sayısı yalnız √3 ile çarpıldığında doğal sayı verir" demek **yanlıştır**. √3'ün her doğal sayı katı işe yarar:
√3, 2√3, 3√3, 10√3, 100√3, ...

Üstelik bu katlar başka biçimlerde de yazılabilir:
- 2√3 = √12
- 3√3 = √27
- 5√3 = √75

Yani √12 · √27 = 2√3 · 3√3 = 6 · 3 = **18** de bir doğal sayıdır.

Sorularda genellikle "en küçük çarpan" sorulur; o da her zaman **√b**'dir. "Kaç farklı çarpan vardır?" sorusunun cevabı ise **sonsuz**dur.

ÖRNEK **Geometride kullanalım.**

Bir dikdörtgenin bir kenarı **3√3 cm**'dir ve alanının santimetrekare cinsinden değeri bir **doğal sayı**dır. Diğer kenar aşağıdakilerden hangisi olabilir?

√18 cm · √72 cm · √75 cm

Çözüm: Alan iki kenarın çarpımıdır. 3√3 ifadesinin kök dışına çıkamayan çarpanı **√3** olduğuna göre diğer kenar, √3'ün bir doğal sayı katı olmalıdır.

- √18 = 3√2 → kök içi **2**, uymaz
- √72 = 6√2 → kök içi **2**, uymaz
- √75 = 5√3 → kök içi **3**, **uyar** ✓

Cevap: √75 cm

Kontrol: 3√3 · 5√3 = 15 · 3 = **45 cm²**, gerçekten doğal sayı ✓

ETKİNLİK 1 **Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.**

a) D a√b + c√b = (a + c)√b eşitliği doğrudur.

b) Y Kök içleri farklı olan iki kareköklü ifade her zaman toplanabilir.

c) Y √3 + √2 ifadesi √5'e eşittir.

d) D √8 + √18 ifadesi 5√2'ye eşittir.

e) D Katsayısı yazılmayan kareköklü bir ifadenin katsayısı 1'dir.

f) Y 2√7 − √7 işleminin sonucu 2'dir.

g) D a√b ifadesinin kök dışına çıkamayan çarpanı √b'dir.

h) D √12 sayısı √3 ile çarpıldığında sonuç bir doğal sayıdır.

ı) Y √12 sayısı yalnız √3 ile çarpıldığında doğal sayı verir.

i) D Paydası kareköklü bir kesirde pay ve payda aynı kareköklü ifadeyle çarpılırsa kesrin değeri değişmez.

j) D Payı 6, paydası √2 olan kesir 3√2'ye eşittir.

k) D √27 − √48 işleminin sonucu −√3'tür.

ETKİNLİK 2 **Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.**

Kareköklü İfade	a√b Biçimi	Kök Dışına Çıkamayan Çarpan	Sonucu Doğal Sayı Yapan İki Çarpan
√50	5√2	√2	√2 ve 2√2
√27	3√3	√3	√3 ve 2√3
√60	2√15	√15	√15 ve 2√15
√80	4√5	√5	√5 ve 3√5
√18	3√2	√2	√2 ve 4√2
√200	10√2	√2	√2 ve 5√2
√5	√5	√5	√5 ve 2√5

Paydayı Doğal Sayı Yapma

Bir kesrin paydasında kareköklü bir ifade varsa, **pay ve payda aynı kareköklü ifadeyle çarpılarak** payda doğal sayıya çevrilir.

Bu işlem kesrin değerini **değiştirmez**; çünkü pay ve payda aynı sayıyla çarpılıyor, yani kesir **genişletiliyor**.

Kullanılan temel eşitlik yine aynıdır:
√b · √b = b

Paydası **c√b** biçiminde olan bir kesirde pay ve payda **√b** ile çarpılır; payda **c · b** doğal sayısına dönüşür.

İfade	Ne ile Genişletilir?	Adımlar	Sonuç
Payı 2, paydası √2	√2	(2 · √2) : (√2 · √2) = 2√2 : 2	**√2**
Payı 18, paydası √3	√3	18√3 : 3	**6√3**
Payı 24, paydası √6	√6	24√6 : 6	**4√6**
Payı 1, paydası 2√3	√3	√3 : (2 · 3) = √3 : 6	**√3 bölü 6**
Payı 3√2, paydası √3	√3	3√6 : 3	**√6**
Payı 5, paydası 3√6	√6	5√6 : (3 · 6) = 5√6 : 18	**5√6 bölü 18**

Paydayı neden doğal sayı yapıyoruz?

Bunun üç pratik sebebi vardır:

1. Karşılaştırma kolaylaşır. Paydası kareköklü iki kesri karşılaştırmak zordur; paydalar doğal sayı olunca ortak payda bulmak kolaylaşır.

2. Yaklaşık değer hesabı kolaylaşır. Payı 1, paydası √2 olan kesri hesaplamak için 1 sayısını 1,41'e bölmek gerekir. Oysa aynı sayı **√2 bölü 2** biçiminde yazılırsa 1,41'i 2'ye bölmek yeter; bu çok daha kolaydır.

3. Sonuçlar aynı biçimde yazılır. Aynı sayının iki farklı görünümü olması karışıklık yaratır; bu yüzden paydayı doğal sayı yapmak bir **yazım kuralı** hâline gelmiştir.

Yine de unutma: Bu bir **sadeleştirme**dir, sayının değeri değişmez. Payı 1, paydası √2 olan kesir ile **√2 bölü 2** tamamen aynı sayıdır.

ETKİNLİK 3 **Aşağıdaki ifadelerin paydalarını doğal sayı yapınız.**

a) Payı 2, paydası √2 olan kesir **2√2 : 2 = √2**

b) Payı 18, paydası √3 olan kesir **18√3 : 3 = 6√3**

c) Payı 24, paydası √6 olan kesir **24√6 : 6 = 4√6**

d) Payı 1, paydası 2√3 olan kesir **√3 : 6**

e) Payı 3√2, paydası √3 olan kesir **3√6 : 3 = √6**

f) Payı 5, paydası 3√6 olan kesir **5√6 : 18**

g) Payı 12, paydası √8 olan kesir **√8 = 2√2 → 12 : (2√2) = 6 : √2 = 6√2 : 2 = 3√2**

h) Payı 10, paydası √5 olan kesir **10√5 : 5 = 2√5**

Kareköklü İfadelerde Toplama ve Çıkarma

Kareköklü ifadelerde toplama ve çıkarma yapılırken **kök içleri aynı olan** terimlerin **katsayıları** toplanır ya da çıkarılır. Elde edilen sonuç, ortak köke **katsayı** olarak yazılır.

a, b, c birer doğal sayı olmak üzere:
a√b + c√b = (a + c)√b
a√b – c√b = (a – c)√b

Kök içi **değişmez**; yalnız katsayılar işleme girer.

Kök içleri **farklı** olan terimler toplanamaz ya da çıkarılamaz; ifade **aynen kalır**.



Kareköklü ifadelerde toplama ve çıkarma işleminin hangi sırayla yapılacağını gösteren akış şeması. Önce her terim sadeleştirilir, sonra kök içleri aynı olanların katsayıları toplanır.

ÖRNEK **Kök içleri aynı olan terimlerle işlem yapalım.**

- **2√3 + 4√3** = (2 + 4)√3 = **6√3**
- **3√5 + √5** = (3 + 1)√5 = **4√5**
- **7√5 − 3√5** = (7 − 3)√5 = **4√5**
- **2√7 − √7** = (2 − 1)√7 = **√7**
- **8√2 + √2 − 6√2** = (8 + 1 − 6)√2 = **3√2**
- **6√5 − 10√5 + 2√5** = (6 − 10 + 2)√5 = **−2√5**

İkinci ve dördüncü satırlarda **√5** ve **√7** terimlerinin katsayısı yazılmamış; onların katsayısı **1**'dir. Bu, konunun en sık atlanan noktasıdır.

NOT **Karekök toplama üzerine dağılmaz.**

Bu, konunun en çok puan kaybettiren kuralıdır:
√a + √b, √(a + b) DEĞİLDİR.

Somut bir örnekle görelim:
√9 + √16 = 3 + 4 = **7**
√(9 + 16) = √25 = **5**

7 ile 5 eşit değildir. O hâlde iki ifade de eşit değildir.

Peki √9 + √16 = 7 sayısı hangi karekökün değeridir?
7 = √49

Yani √9 + √16 = **√49**'dur, √25 değil. Bu da köklerin toplanmasının, kök içlerinin toplanmasıyla hiçbir ilgisi olmadığını gösterir.

Buna karşılık çarpma ve bölmede karekök dağılır:
√9 · √16 = 3 · 4 = 12 ve √(9 · 16) = √144 = 12 → **EŞİT**

ETKİNLİK 4 **Aşağıdaki işlemleri yapınız. Sonuç sadeleşmiyorsa ifadeyi aynen yazınız.**

a) 2√2 + 3√2 **(2 + 3)√2 = 5√2**

b) 5√3 + 6√3 **(5 + 6)√3 = 11√3**

c) 7√5 − 3√5 **(7 − 3)√5 = 4√5**

d) 2√7 − √7 **(2 − 1)√7 = √7**

e) 8√11 − 6√11 + √11 **(8 − 6 + 1)√11 = 3√11**

f) 8√2 + √2 − 6√2 **(8 + 1 − 6)√2 = 3√2**

g) 6√5 − 10√5 + 2√5 **(6 − 10 + 2)√5 = −2√5**

h) 3√2 + 4√2 − 10√2 **(3 + 4 − 10)√2 = −3√2**

ı) 5√5 + √3 − 3√5 **(5 − 3)√5 + √3 = 2√5 + √3**

i) √3 + √13 **Kök içleri farklı, işlem yapılamaz: √3 + √13**

Kök İçlerini Eşitleyerek İşlem Yapma

Kök içleri **ilk bakışta farklı görünen** terimler, sadeleştirildiğinde aynı kök içine sahip olabilir. Bu yüzden toplama ve çıkarmada ilk adım her zaman **her terimi ayrı ayrı a√b biçimine getirmektir**.

Sadeleştirmeden sonra:
• Kök içleri **eşitlenebiliyorsa** katsayılar toplanır ya da çıkarılır.
• Kök içleri **eşitlenemiyorsa** o terimler ayrı ayrı yazılır.

Bir ifadede **birden çok farklı kök içi** kalabilir; o zaman sonuç iki ya da daha çok terimli olur. Bu bir hata değildir; ifadenin en sade hâlidir.

ÖRNEK **Önce sadeleştirip sonra toplayalım.**

√8 + √18
√8 = √(4 · 2) = 2√2 · √18 = √(9 · 2) = 3√2
2√2 + 3√2 = **5√2**

√27 − √48
√27 = 3√3 · √48 = 4√3
3√3 − 4√3 = (3 − 4)√3 = **−√3**

√48 + 3√75 + √108
√48 = 4√3 · 3√75 = 3 · 5√3 = 15√3 · √108 = 6√3
4√3 + 15√3 + 6√3 = **25√3**

2√125 − 2√80 − √20
2√125 = 2 · 5√5 = 10√5 · 2√80 = 2 · 4√5 = 8√5 · √20 = 2√5
10√5 − 8√5 − 2√5 = **0**

Son örnekte sonuç **sıfır** çıktı; katsayıların toplamı sıfır olduğu için ifade tamamen yok oldu.

İşlem	Sadeleştirilmiş Terimler	Sonuç
√2 + √8	√2 + 2√2	**3√2**
√12 + √27	2√3 + 3√3	**5√3**
2√20 − √45	4√5 − 3√5	**√5**
√32 − 2√50	4√2 − 10√2	**−6√2**
3√44 − √99 + 5√11	6√11 − 3√11 + 5√11	**8√11**
2√28 + 3√63 − √175	4√7 + 9√7 − 5√7	**8√7**
√12 + 2√20	2√3 + 4√5	**2√3 + 4√5**

Son satıra dikkat. √12 + 2√20 işleminde terimler sadeleştirildikten sonra kök içleri **3** ve **5** oldu; bunlar eşitlenemez. O hâlde ifade **2√3 + 4√5** olarak kalır.

Bu bir "çözemedim" durumu değildir; ifadenin **en sade hâli** budur.

Birden çok farklı kök içi olan işlemler:
5√2 − √27 + 3√18
= 5√2 − 3√3 + 3 · 3√2
= 5√2 − 3√3 + 9√2

Şimdi kök içi 2 olanları bir araya toplayalım:
= (5 + 9)√2 − 3√3
= **14√2 − 3√3**

Sonuçta iki terim kaldı. Terimlerin sırası genellikle **kök içi küçükten büyüğe** yazılır; ama bu bir kural değil, alışkanlıktır.

ETKİNLİK 5 **Aşağıdaki işlemleri yapınız. Önce her terimi sadeleştiriniz.**

a) √2 + √8 **√2 + 2√2 = 3√2**

b) √12 + √27 **2√3 + 3√3 = 5√3**

c) 2√20 − √45 **4√5 − 3√5 = √5**

d) √32 − 2√50 **4√2 − 10√2 = −6√2**

e) √48 + 3√75 + √108 **4√3 + 15√3 + 6√3 = 25√3**

f) 2√125 − 2√80 − √20 **10√5 − 8√5 − 2√5 = 0**

g) 3√44 − √99 + 5√11 **6√11 − 3√11 + 5√11 = 8√11**

h) 2√28 + 3√63 − √175 **4√7 + 9√7 − 5√7 = 8√7**

ı) √12 + 2√20 **2√3 + 4√5 (kök içleri eşitlenemez)**

i) 3√5 − √48 + 3√27 **3√5 − 4√3 + 9√3 = 3√5 + 5√3**

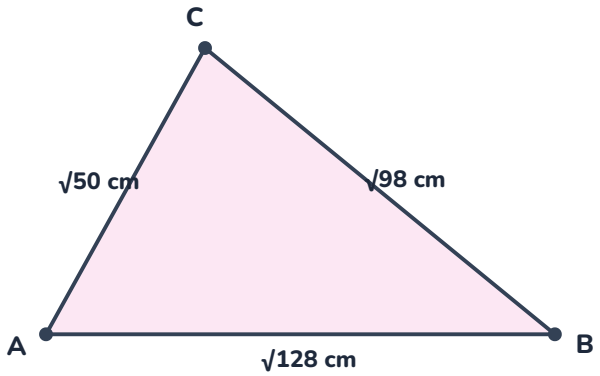
Geometride Toplama ve Çıkarma

Çevre hesapları birer **toplama** işlemidir. Kenar uzunlukları kareköklü verilmişse çevreyi bulmak için önce her kenar sadeleştirilir, sonra aynı kök içine sahip terimler toplanır.

Alan hesabı ise bir **çarpma** işlemidir; orada kök içleri çarpılır.

Bu iki işlemi karıştırmamak gerekir:
• **Çevre:** kenarlar toplanır → kök içleri **aynı kalmalı**
• **Alan:** kenarlar çarpılır → kök içleri **çarpılır**

Aşağıdaki iki şeklin çevrelerini hesaplayalım.



Kenar uzunlukları kareköklü ifadelerle verilen bir üçgen. Kenarlar √128 cm, √98 cm ve √50 cm'dir.

ÖRNEK **Üçgenin çevresini bulalım.**

Önce her kenarı sadeleştirelim:
√128 = √(64 · 2) = **8√2 cm**
√98 = √(49 · 2) = **7√2 cm**
√50 = √(25 · 2) = **5√2 cm**

Üç kenarın da kök içi **2** oldu; katsayıları toplayabiliriz:
Çevre = 8√2 + 7√2 + 5√2 = (8 + 7 + 5)√2 = **20√2 cm**

Yaklaşık değer: √2 ≈ 1,41 alınırsa
20 · 1,41 = **28,2 cm**

Üçgen eşitsizliği kontrolü: En uzun kenar 8√2; diğer ikisinin toplamı 7√2 + 5√2 = 12√2. 12√2 > 8√2 olduğuna göre böyle bir üçgen gerçekten çizilebilir ✓



Kenar uzunlukları √360 cm ve √160 cm olan bir dikdörtgen.

ÖRNEK **Dikdörtgenin çevresini ve alanını bulalım.**

Kenarları sadeleştirelim:
√360 = √(36 · 10) = **6√10 cm**
√160 = √(16 · 10) = **4√10 cm**

Çevre:
2 · (6√10 + 4√10) = 2 · 10√10 = **20√10 cm**

Burada önce parantez içindeki **toplama** yapıldı; kök içleri aynı olduğu için katsayılar toplandı.

Alan:
6√10 · 4√10 = (6 · 4) · 10 = **240 cm²**

Burada ise **çarpma** yapıldı; √10 · √10 = 10 olduğu için karekök işareti kayboldu ve sonuç doğal sayı çıktı.

Dikkat: Çevrede karekök **kaldı**, alanda **kayboldu**. Sebebi, toplamada kök içinin değişmemesi ama çarpmada kök içlerinin çarpılmasıdır.

NOT **Kenar farkı da bir çıkarma işlemidir.**

Yukarıdaki dikdörtgende uzun kenar ile kısa kenar arasındaki fark:
$6\sqrt{10} - 4\sqrt{10} = \mathbf{2\sqrt{10}}$ **cm**

Yaklaşık değeri: $\sqrt{10} \approx 3{,}16$ alınırsa $2 \cdot 3{,}16 =$ **6,32 cm**

Sık yapılan hata: Farkı bulurken kök içlerini çıkarmak.
$\sqrt{360} - \sqrt{160}$, $\mathbf{\sqrt{200}}$ **değildir**.

Kontrol edelim: $\sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ · doğru sonuç $2\sqrt{10} \approx 6{,}32$
İki sayı açıkça farklıdır.

Kural yine aynı: **Karekök toplama ve çıkarma üzerine dağılmaz.**