ÇÖZÜMLER

Ondalık İfadelerin Karekökleri ve Gerçek Sayılar

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

1. Bölüm Soru 1–5

1 Aşağıdaki kareköklerin değerlerini bulunuz.

a) √0,16
b) √0,81
c) √1,69
d) Bulduğunuz üç sayıyı küçükten büyüğe sıralayınız.

a) √0,16
Virgülden sonra iki basamak var; payda 100 olur:
0,16 = **16/100**

√(16/100) = √16 / √100 = 4/10 = **0,4**

Kontrol: 0,4 · 0,4 = 0,16 ✓

b) √0,81
0,81 = **81/100**

√(81/100) = √81 / √100 = 9/10 = **0,9**

Kontrol: 0,9 · 0,9 = 0,81 ✓

c) √1,69
1,69 = **169/100**

√(169/100) = √169 / √100 = 13/10 = **1,3**

Kontrol: 1,3 · 1,3 = 1,69 ✓

d) Sıralama
Bulduğumuz değerler: **0,4** · **0,9** · **1,3**

Tam kısımlara bakalım: 0, 0 ve 1. En büyük 1,3'tür.
Kalan ikisinde onda birler basamağına bakalım: 4 < 9

Sıralama: **0,4 < 0,9 < 1,3**

Gözlem: Üç sayının da virgülden sonra iki basamağı vardı ve kareköklerinin **bir** basamağı çıktı. Ayrıca 1'den küçük sayıların karekökü kendilerinden **büyük**, 1'den büyük sayıların karekökü ise kendilerinden **küçük** çıktı:
0,16 < 0,4 · 0,81 < 0,9 · 1,69 > 1,3

devamı →

1 *(çözümün devamı)*

a) 0,4 b) 0,9 c) 1,3 d) 0,4 < 0,9 < 1,3

2 Aşağıdaki altı sayı veriliyor.

I. √36
II. √20
III. $0,\overline{3}$
IV. √(49/4)
V. π
VI. 2,75

a) Her sayıyı en sade hâliyle yazınız.
b) Bu sayıları rasyonel ve irrasyonel diye ikiye ayırınız.
c) Hangileri doğal sayıdır?
d) Ayırırken kullandığınız ölçütü bir cümleyle yazınız.

a) En sade hâlleri

I. √36: 36 tam karedir → **6**

II. √20: 20 = 4 · 5 → **2√5** (20 tam kare değil)

III. $0,\overline{3}$: Devirli ondalık; kesre çevirelim: (3 − 0)/9 = 3/9 = **1/3**

IV. √(49/4): Pay ve paydanın karekökünü ayrı ayrı alalım: √49 / √4 = **7/2** = 3,5

V. π: Sadeleşmez → **π** ≈ 3,1416

VI. 2,75: Sonlu ondalık; kesre çevirelim: 275/100 = **11/4**

b) Sınıflandırma
Rasyonel olanlar: I, III, IV, VI
Hepsi a/b biçiminde yazılabiliyor: 6/1, 1/3, 7/2, 11/4

İrrasyonel olanlar: II, V
• √20 = 2√5 → kök içi tam kare değil, a/b biçiminde yazılamaz
• π → ondalık açılımı düzensiz sürer

c) Doğal sayı olanlar
Doğal sayılar 0, 1, 2, 3, ... biçimindedir.

• I. √36 = **6** → doğal sayı ✓
• III. 1/3 → kesirli, değil
• IV. 3,5 → tam sayı değil
• VI. 2,75 → tam sayı değil

Cevap: Yalnız I (√36 = 6) doğal sayıdır.

devamı →

2 *(çözümün devamı)*

d) Ölçüt
"Bir sayı **a/b** biçiminde (a ve b tam sayı, b sıfırdan farklı) yazılabiliyorsa **rasyoneldir**; yazılamıyorsa **irrasyoneldir**."

Kareköklü ifadelerde bu ölçüt pratikleşir: **Kök içi tam kare ise rasyonel, değilse irrasyoneldir.**

Uyarı: Karekök işareti görmek tek başına "irrasyonel" demek değildir. √36 ve √(49/4) ifadelerinde karekök var ama ikisi de rasyoneldir.

b) Rasyonel: I, III, IV, VI · İrrasyonel: II, V c) Yalnız I

3 Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) √0,04 + √1,96 − √3,24
b) √2,25 − √1,44 − √0,16
c) √0,09 · √0,64
d) Bulduğunuz üç sonucu küçükten büyüğe sıralayınız.

a) √0,04 + √1,96 − √3,24
Her karekökü ayrı ayrı bulalım:
√0,04 = √(4/100) = 2/10 = **0,2**
√1,96 = √(196/100) = 14/10 = **1,4**
√3,24 = √(324/100) = 18/10 = **1,8**

İşlemi yapalım:
0,2 + 1,4 = 1,6
1,6 − 1,8 = **−0,2**

b) √2,25 − √1,44 − √0,16
√2,25 = √(225/100) = 15/10 = **1,5**
√1,44 = √(144/100) = 12/10 = **1,2**
√0,16 = √(16/100) = 4/10 = **0,4**

İşlemi yapalım:
1,5 − 1,2 = 0,3
0,3 − 0,4 = **−0,1**

devamı →

3 *(çözümün devamı)*

c) √0,09 · √0,64
√0,09 = **0,3** · √0,64 = **0,8**

0,3 · 0,8 = **0,24**

İkinci yol: Çarpmada karekök dağılır:
√0,09 · √0,64 = √(0,09 · 0,64) = √0,0576
0,0576 = 576/10 000 → √576 / √10 000 = 24/100 = **0,24** ✓

d) Sıralama
Bulduğumuz değerler: **−0,2** · **−0,1** · **0,24**

Negatif sayılar pozitiflerden küçüktür. İki negatifi karşılaştıralım: mutlak değeri büyük olan daha küçüktür.
0,2 > 0,1 olduğuna göre −0,2 < −0,1

Sıralama: **−0,2 < −0,1 < 0,24**
yani **a < b < c**

Uyarı: (a) ve (b) şıklarında kareköklerı tek bir karekök içinde toplamak **yanlış olurdu**. Karekök çarpma ve bölmeye dağılır (c şıkkında olduğu gibi), toplama ve çıkarmaya dağılmaz.

a) −0,2 b) −0,1 c) 0,24 d) a < b < c

4 Efe, **√0,4** ifadesinin değerini şöyle bulmuştur:

"√4 = 2 olduğuna göre √0,4 = **0,2**'dir."

a) Efe'nin sonucunun yanlış olduğunu bir kontrolle gösteriniz.
b) 0,2 sayısı hangi sayının kareköküdür?
c) √0,4 ifadesinin doğru değerini bulunuz.
d) Bir ondalık ifadenin karekökünün sonlu ondalık olması için hangi koşul gerekir?

a) Kontrolle gösterelim
Bir sayının karekökü, kendisiyle çarpıldığında o sayıyı vermelidir.

Efe'nin sonucunu sınayalım:
0,2 · 0,2 = **0,04**

Oysa aranan sayı **0,4** idi. 0,04 ile 0,4 farklı sayılardır; aralarında **10 kat** fark vardır.

O hâlde Efe'nin sonucu **yanlıştır**.

Hatanın kaynağı: Efe yalnız rakamlara bakmış, virgülden sonraki **basamak sayısını** hesaba katmamıştır. 0,4 sayısında virgülden sonra **bir** basamak vardır; bu sayı 4/10 kesrine eşittir ve paydası 10'dur. 10 sayısı **tam kare değildir**.

b) 0,2 hangi sayının karekökü?
0,2 · 0,2 = **0,04**

Yani **0,2 sayısı 0,04'ün kareköküdür**: √0,04 = 0,2

c) √0,4 ifadesinin doğru değeri
Önce kesre çevirelim:
0,4 = **4/10**

Pay ve paydanın karekökünü alalım:
√(4/10) = √4 / √10 = **2 / √10**

Paydayı doğal sayı yapalım. Pay ve paydayı √10 ile çarpalım:
(2 · √10) / (√10 · √10) = 2√10 / 10 = **√10 / 5**

Yaklaşık değeri: √10 ≈ 3,16 olduğuna göre
√0,4 ≈ 3,16 : 5 ≈ **0,632**

Kontrol: 0,632 · 0,632 ≈ 0,399 ≈ 0,4 ✓

devamı →

4 *(çözümün devamı)*

d) Sonlu ondalık olma koşulu
Ondalık ifade kesre çevrildiğinde paydası 10, 100, 1000, ... olur. Karekökün sonlu bir ondalık çıkması için **paydanın tam kare** olması gerekir.

10 = tam kare değil · 100 = 10^2 ✓ · 1000 = tam kare değil · 10 000 = 100^2 ✓

Koşul: Virgülden sonraki basamak sayısı ÇİFT olmalıdır.

Ayrıca paydaki sayının da tam kare olması gerekir; yoksa sonuçta karekök kalır (√0,02 = √2/10 gibi).

a) $0{,}2^2 = 0{,}04 \neq 0{,}4$ b) 0,04 c) √10/5 ≈ 0,632 d) Basamak sayısı çift olmalı

5 Bir öğrenci şöyle diyor:

"İçinde karekök işareti bulunan her sayı **irrasyoneldir**."

a) Öğrenci haklı mıdır? Gerekçesiyle açıklayınız.
b) İddiayı çürüten üç farklı örnek veriniz.
c) Kareköklü bir ifadenin rasyonel olup olmadığını belirleyen ölçüt nedir?
d) √0,25 ve √0,5 sayılarından hangisi rasyoneldir? Hesaplayarak gösteriniz.

a) Öğrenci haklı mıdır?
Haklı değildir.

Karekök işaretinin varlığı bir sayıyı irrasyonel yapmaz. Belirleyici olan, ifadenin **en sade hâlinde** hâlâ karekök kalıp kalmadığıdır.

Kök içi tam kare olduğunda karekök işareti tamamen kaybolur ve geriye rasyonel bir sayı kalır.

b) Üç karşı örnek

1. √49
49 = 7^2 tam karedir → √49 = **7**
7 sayısı bir doğal sayıdır, dolayısıyla rasyoneldir.

2. √(9/16)
√9 / √16 = **3/4**
Bir kesir elde ettik; rasyoneldir.

3. √8 / √2
Bölmede kök içleri bölünür: √(8 : 2) = √4 = **2**
Tek tek bakıldığında ikisi de irrasyonel görünüyordu; ama bölümleri rasyonel çıktı.

devamı →

5 *(çözümün devamı)*

c) Ölçüt

"Kareköklü bir ifade **en sade hâline** getirildiğinde kök içinde 1'den farklı bir sayı kalmıyorsa (yani kök içi tam kare ise) sayı **rasyoneldir**; kalıyorsa **irrasyoneldir**."

Pratik uygulama:

• √36, √81, √(25/4) → kök içleri tam kare → **rasyonel**

• √5, √12, √50 → kök içleri tam kare değil → **irrasyonel**

d) √0,25 ile √0,5

√0,25: Virgülden sonra **iki** basamak var:

0,25 = 25/100

√(25/100) = 5/10 = **0,5**

0,5 = 1/2 biçiminde yazılabildiği için **rasyoneldir** ✓

√0,5: Virgülden sonra **bir** basamak var:

0,5 = 5/10 = 1/2

√(1/2) = √1 / √2 = 1/√2 = **√2 / 2**

Sonuçta karekök kaldı; √2 irrasyonel olduğuna göre bu sayı da **irrasyoneldir**.

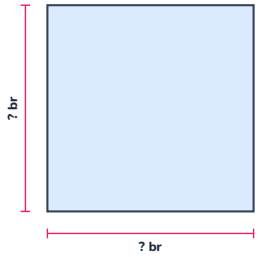
Cevap: √0,25 rasyoneldir, √0,5 irrasyoneldir.

Dikkat: İki ifade birbirine çok benziyor; yalnız bir sıfır farkı var. Ama biri rasyonel, diğeri irrasyonel. Bu yüzden basamak sayısını saymak çok önemlidir.

a) Haklı değil b) √49, √(9/16), √8/√2 c) Kök içi tam kare mi? d) √0,25 rasyonel

2. Bölüm Soru 6–10

6 Aşağıda kare biçiminde bir bölge verilmiştir. Bu bölgenin alanı **3,24 br²**'dir.



a) Bölgenin bir kenar uzunluğunu bulunuz.
b) Bölgenin çevresini bulunuz.
c) Kenar uzunluğu iki katına çıkarılırsa yeni alan kaç br² olur?
d) Yeni çevre kaç br'dir?
e) Alan kaç katına, çevre kaç katına çıktı?

a) Kenar uzunluğu
Karede **alan = kenar · kenar** olduğuna göre **kenar = √alan**'dır.

Kenar = √3,24

Ondalık ifadeyi kesre çevirelim (virgülden sonra iki basamak):
3,24 = **324/100**

√(324/100) = √324 / √100 = **18/10** = **1,8 br**

Kontrol: 1,8 · 1,8 = 3,24 ✓

b) Çevre
Karenin çevresi bir kenarın 4 katıdır:
4 · 1,8 = **7,2 br**

c) Kenar iki katına çıkarsa yeni alan
Yeni kenar: 1,8 · 2 = **3,6 br**

Yeni alan: 3,6 · 3,6 = **12,96 br²**

Çarpmayı adım adım yapalım:
3,6 · 3,6 = 3,6 · 3 + 3,6 · 0,6 = 10,8 + 2,16 = **12,96**

d) Yeni çevre
4 · 3,6 = **14,4 br**

e) Kaç katına çıktılar?
Alan: 12,96 : 3,24 = **4** → alan **4 katına** çıktı
Çevre: 14,4 : 7,2 = **2** → çevre **2 katına** çıktı

Neden farklı davrandılar?

Çevre kenarla doğru orantılıdır (çevre = 4 · kenar). Kenar 2 katına çıkınca çevre de 2 katına çıkar.

Alan ise kenarın **karesiyle** ilgilidir (alan = kenar · kenar). Kenar 2 katına çıkınca alan 2 · 2 = **4 katına** çıkar.

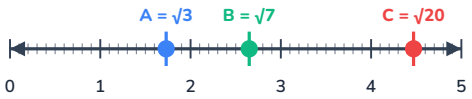
devamı →

6 *(çözümün devamı)*

Genel kural: Kenar **k** katına çıkarsa çevre **k** katına, alan **k²** katına çıkar.

a) 1,8 br b) 7,2 br c) 12,96 br² d) 14,4 br e) Alan 4, çevre 2 katına

7 Aşağıdaki sayı doğrusunda üç sayının yaklaşık yerleri işaretlenmiştir.



a) Her sayının hangi iki ardışık doğal sayı arasında olduğunu yazınız.
b) Üç sayı da irrasyonel midir? Gerekçelendiriniz.
c) C noktasındaki sayıyı a√b biçiminde yazınız.
d) A ile C arasında kaç tam sayı vardır?
e) B noktasındaki sayı hangi ardışık doğal sayıya daha yakındır?

a) Hangi iki ardışık doğal sayı arasında?
Her sayı için komşu tam kareleri bulalım.

A = √3: 1 < 3 < 4 olduğuna göre √1 < √3 < √4
1 < √3 < 2 (≈ 1,73)

B = √7: 4 < 7 < 9 olduğuna göre √4 < √7 < √9
2 < √7 < 3 (≈ 2,65)

C = √20: 16 < 20 < 25 olduğuna göre √16 < √20 < √25
4 < √20 < 5 (≈ 4,47)

Sayı doğrusundaki yerleri de bu sonuçlarla uyuşuyor ✓

b) Üçü de irrasyonel mi?
Evet, üçü de irrasyoneldir.

Bir kareköklü ifadenin rasyonel olması için kök içinin **tam kare** olması gerekir.
- 3 tam kare değil → √3 irrasyonel
- 7 tam kare değil → √7 irrasyonel
- 20 tam kare değil (20 = 4 · 5, 5 tam kare değil) → √20 irrasyonel

Üçünün de ondalık açılımı hiç bitmez ve hiç devretmez.

c) C noktasındaki sayıyı sadeleştirelim
20 sayısının tam kare çarpanını arayalım: 20 = **4** · 5

√20 = √(4 · 5) = **2√5**

Kontrol: 2√5 = √(4 · 5) = √20 ✓ · Yaklaşık: 2 · 2,24 = 4,48 ✓

devamı →

7 *(çözümün devamı)*

d) A ile C arasındaki tam sayılar
A = √3 ≈ 1,73 · C = √20 ≈ 4,47

Bu iki sayı arasındaki tam sayılar: **2, 3, 4**

Cevap: 3 tane tam sayı vardır.

Kontrol: 1,73 < 2 < 3 < 4 < 4,47 ✓ (5 sayısı 4,47'den büyük olduğu için aralıkta değildir.)

e) B hangi doğal sayıya daha yakın?
B = √7, yani 2 ile 3 arasında.

Uzaklıkları karşılaştıralım:
• 2'ye uzaklığı: 7 − 4 = **3**
• 3'e uzaklığı: 9 − 7 = **2**

Kök içindeki uzaklıklardan küçük olan 3'e aittir.

Cevap: √7 sayısı 3'e daha yakındır.

Kontrol: √7 ≈ 2,65; 3'e uzaklığı 0,35, 2'ye uzaklığı 0,65 ✓

a) 1-2, 2-3, 4-5 b) Üçü de irrasyonel c) 2√5 d) 3 tane e) 3'e yakın

8 Kare biçimindeki bir levhanın alanı **0,64 m²**'dir.

a) Levhanın bir kenar uzunluğu kaç metredir?
b) Levhanın çevresi kaç metredir?
c) Kenar uzunluğunu santimetre cinsinden yazınız.
d) Levhanın alanını santimetrekare cinsinden yazınız.
e) (c) ve (d) şıklarındaki sonuçların tutarlı olduğunu gösteriniz.

a) Kenar uzunluğu
Kenar = √0,64

Kesre çevirelim (virgülden sonra iki basamak):
0,64 = **64/100**

√(64/100) = √64 / √100 = 8/10 = **0,8 m**

Kontrol: 0,8 · 0,8 = 0,64 ✓

b) Çevre
4 · 0,8 = **3,2 m**

devamı →

8 *(çözümün devamı)*

c) Kenar uzunluğu santimetre cinsinden
1 m = 100 cm olduğuna göre:
0,8 m = 0,8 · 100 = **80 cm**

d) Alan santimetrekare cinsinden
1 m^2 = 100 cm · 100 cm = **10 000 cm^2**

0,64 m^2 = 0,64 · 10 000 = **6400 cm^2**

e) Tutarlılık kontrolü
Kenar 80 cm ise alan kaç cm^2 olmalıdır?

80 · 80 = **6400 cm^2**

(d) şıkkında da **6400 cm^2** bulmuştuk. İki sonuç uyuşuyor ✓

Neden kontrol etmek önemli? Birim dönüşümlerinde uzunluk ile alanın **farklı çarpanlarla** dönüştüğüne dikkat etmek gerekir:
• Uzunlukta: 1 m = **100** cm
• Alanda: 1 m^2 = **10 000** cm^2

Alanı da 100 ile çarpmak yaygın bir hatadır; doğrusu 100 · 100 = 10 000 ile çarpmaktır.

Ek doğrulama: √6400 = 80 ✓ Yani santimetre cinsinden de "kenar = √alan" bağıntısı geçerlidir.

a) 0,8 m b) 3,2 m c) 80 cm d) 6400 cm^2 e) 80 · 80 = 6400 ✓

9 Bir öğrenci şöyle diyor:

"π sayısı **22/7**'ye eşittir. İki tam sayının oranı olarak yazılabildiğine göre π **rasyoneldir**."

a) 22/7 kesrinin ondalık gösterimini bölme yaparak bulunuz.
b) π sayısının ondalık açılımını altı basamak yazınız.
c) İki sayı hangi basamakta ayrışır?
d) Öğrenci haklı mıdır? Gerekçesiyle açıklayınız.
e) 22/7 sayısı rasyonel midir?

a) 22/7 kesrinin ondalık gösterimi
22 : 7 bölmesini yapalım.

22 : 7 → **3** (kalan 1). Virgül konur.
10 : 7 → **1** (kalan 3)
30 : 7 → **4** (kalan 2)
20 : 7 → **2** (kalan 6)
60 : 7 → **8** (kalan 4)
40 : 7 → **5** (kalan 5)
50 : 7 → **7** (kalan 1)

Kalan yeniden **1** oldu; buradan sonra aynı rakamlar tekrar eder.

22/7 = 3,142857142857... = $\mathbf{3,\overline{142857}}$

b) π sayısının açılımı
π = **3,141592**65...

Bu açılım hiç bitmez ve hiçbir düzende tekrar etmez.

c) Hangi basamakta ayrışırlar?
İki sayıyı alt alta yazalım:
22/7 = 3,**1 4 2** 857...
π = 3,**1 4 1** 592...

- Onda birler: 1 = 1 → eşit
- Yüzde birler: 4 = 4 → eşit
- **Binde birler: 2 ile 1** → farklı!

İki sayı binde birler basamağında ayrışır.

Aradaki fark yaklaşık 3,142857 − 3,141593 = **0,001264**'tür.

d) Öğrenci haklı mıdır?
Haklı değildir.

devamı →

9 *(çözümün devamı)*

22/7 sayısı π'ye **yakın** bir değerdir, ama ona **eşit değildir**. (c) şıkkında gösterdiğimiz gibi üçüncü ondalık basamakta ayrışıyorlar.

Öğrencinin hatası, bir **yaklaşık değeri** sayının kendisi sanmaktır. İşlemlerde kolaylık olsun diye π yerine 3, 3,14 ya da 22/7 kullanılır; ama bunlar π'nin kendisi değildir.

Asıl gerekçe: π irrasyoneldir; yani hiçbir a/b biçiminde yazılamaz. Bir irrasyonel sayının ondalık açılımı **asla devretmez**. Oysa (a) şıkkında 22/7'nin açılımının devrettiğini gördük. Devirli bir sayı ile devretmeyen bir sayı eşit olamaz.

e) 22/7 rasyonel midir?
Evet, rasyoneldir.

22 ve 7 birer tam sayıdır ve 7 sıfırdan farklıdır; o hâlde 22/7 tanım gereği bir rasyonel sayıdır.

Ondalık gösteriminin **devirli** çıkması da bunu doğruluyor: Devirli ondalık ifadeler her zaman rasyoneldir.

a) 3,142857 devirli b) 3,141592 c) Binde birler d) Haklı değil e) Evet, rasyonel

10 Selin, **$0,4\overline{5}$** sayısını (yalnız 5 devrediyor) rasyonel sayıya çevirirken **45/99** yazmıştır.

a) Selin'in hatasını açıklayınız.
b) Sayının doğru kesir biçimini bulunuz.
c) Selin'in yazdığı 45/99 kesri aslında hangi devirli sayıya eşittir?
d) İki devirli sayıyı karşılaştırınız.

a) Hata nerede?
Selin **iki hata** yapmıştır.

1. Paya devretmeyen kısmı çıkarmamış. $0,4\overline{5}$ sayısında virgülden sonra **4** rakamı devretmiyor, yalnız **5** devrediyor. Bu yüzden paya yazılan sayıdan devretmeyen kısım çıkarılmalıydı.

2. Paydayı yanlış kurmuş. Payda kuralına göre **devreden basamak sayısı kadar 9**, **devretmeyen basamak sayısı kadar 0** yazılır. Burada bir devreden (5) ve bir devretmeyen (4) basamak var; payda **90** olmalıydı. Selin ise iki devreden basamak varmış gibi **99** yazmış.

devamı →

10 *(çözümün devamı)*

b) Doğru çözüm
Devreden kısım: **5** · Devretmeyen kısım: **4**

Pay: Sayının tamamı virgülsüz olarak **45**'tir; devretmeyen kısım **4**'tür.
45 − 4 = **41**

Payda: Bir devreden basamak → bir **9**; bir devretmeyen basamak → bir **0** → **90**

$0,4\overline{5}$ = **41/90**

41 asal sayıdır ve 90'ı bölmez; kesir en sade hâldedir.

Kontrol: 410 : 90 → 4 (kalan 50), 500 : 90 → 5 (kalan 50), 500 : 90 → 5 (kalan 50)...
41/90 = 0,4555... ✓

c) 45/99 hangi devirli sayıya eşit?
Payda 99 olduğuna göre **iki** basamak devrediyor ve devretmeyen basamak yok demektir.

45/99 = **$0,\overline{45}$** = 0,45454545...

Sadeleştirelim: 45/99 = (45 : 9)/(99 : 9) = **5/11**

Kontrol: 50 : 11 → 4 (kalan 6), 60 : 11 → 5 (kalan 5), 50 : 11 → 4 (kalan 6)... → 0,4545... ✓

d) İki sayıyı karşılaştıralım
Doğru sayı: $0,4\overline{5}$ = 0,4555...
Selin'in sayısı: $0,\overline{45}$ = 0,4545...

Basamak basamak bakalım:
- Onda birler: 4 = 4 → eşit
- Yüzde birler: 5 = 5 → eşit
- **Binde birler: 5 ile 4** → 5 > 4

0,4555... > 0,4545...

Yani doğru sayı, Selin'in yazdığından **büyüktür**. Fark küçük görünse de iki sayı farklıdır.

a) Devretmeyen kısmı çıkarmamış, payda yanlış b) 41/90 c) 0,45 devirli (5/11) d) Doğru sayı büyüktür

3. Bölüm Soru 11–15

11 **$0,\overline{3}$** ve **$0,\overline{6}$** devirli ondalık ifadeleri veriliyor.

a) $0,\overline{3}$ sayısını kesir olarak yazınız.
b) $0,\overline{6}$ sayısını kesir olarak yazınız.
c) İki kesri toplayınız.
d) Aynı toplamı ondalık gösterimle yapınca ne elde edilir?
e) Bu iki sonuç ne anlama gelir?

a) 0,3 devirli
Devreden kısım: **3**; devretmeyen kısım yok.

Pay: 3 − 0 = **3**
Payda: bir devreden basamak → **9**

$0,\overline{3}$ = 3/9 = **1/3**

b) 0,6 devirli
Pay: 6 − 0 = **6**
Payda: **9**

$0,\overline{6}$ = 6/9 = **2/3**

c) Kesirleri toplayalım
Paydalar eşit olduğuna göre payları toplamak yeterlidir:

1/3 + 2/3 = 3/3 = **1**

Toplam tam olarak 1'dir.

d) Ondalık gösterimle toplama
0,333333... + 0,666666...

Basamak basamak toplayalım:
- Onda birler: 3 + 6 = **9**
- Yüzde birler: 3 + 6 = **9**
- Binde birler: 3 + 6 = **9**
- ... her basamakta 9

Sonuç: **$0,999999... = 0,\overline{9}$**

e) İki sonuç ne anlama gelir?
(c) şıkkında kesirlerle **1**, (d) şıkkında ondalık gösterimle **$0,\overline{9}$** bulduk.

Aynı işlemin iki farklı yolla yapılmış hâli olduğuna göre iki sonuç **eşit olmak zorundadır**:

$0,\overline{9} = 1$

devamı →

11 *(çözümün devamı)*

Bu, ilk bakışta şaşırtıcı gelir; ama doğrudur. 0,999... sayısı 1'e "çok yakın" değil, tam olarak **1'e eşittir**.

Başka bir kanıt: Devirli sayıyı kesre çevirme kuralını uygulayalım.
Pay: 9 − 0 = 9 · Payda: 9
$0,\overline{9} = 9/9 = \mathbf{1}$ ✓

Üçüncü bir bakış: 1/3 = 0,333... eşitliğinin iki tarafını 3 ile çarpalım:
3 · (1/3) = 1
3 · 0,333... = 0,999...

Sol taraflar eşit olduğuna göre sağ taraflar da eşittir ✓

Bu, bir sayının **birden fazla ondalık gösterimi** olabileceğini gösteren özel bir durumdur.

a) 1/3 b) 2/3 c) 1 d) 0,9 devirli e) 0,999... = 1

12 Bir öğrenci şöyle diyor:

"İki irrasyonel sayının toplamı **her zaman** irrasyoneldir."

a) √2 + √8 toplamını bulunuz. Sonuç rasyonel mi irrasyonel mi?
b) √2 ile (−√2) sayılarının toplamını bulunuz.
c) Öğrenci haklı mıdır?
d) İki irrasyonel sayının çarpımı için aynı soruyu yanıtlayınız.
e) Sonuçtan çıkarılacak genel dersi bir cümleyle yazınız.

a) √2 + √8
Önce her terimi sadeleştirelim:
√2 = **√2**
√8 = √(4 · 2) = **2√2**

Kök içleri aynı olduğuna göre katsayıları toplayabiliriz:
√2 + 2√2 = (1 + 2)√2 = **3√2**

Sonuçta karekök kaldı ve kök içi (2) tam kare değil.

Sonuç irrasyoneldir. (3√2 ≈ 4,243)

b) √2 + (−√2)
Aynı sayının kendisi ve ters işaretlisi toplanıyor:

√2 − √2 = (1 − 1)√2 = 0 · √2 = **0**

Sonuç 0'dır ve 0 bir rasyonel sayıdır (0/1 biçiminde yazılabilir).

devamı →

12 *(çözümün devamı)*

Oysa toplanan iki sayının ikisi de irrasyoneldi: √2 irrasyonel, −√2 de irrasyonel.

c) Öğrenci haklı mıdır?
Haklı değildir.

(b) şıkkı iddiayı çürüten bir **karşı örnektir**. İki irrasyonel sayının toplamı bazen irrasyonel ((a) şıkkı), bazen rasyonel ((b) şıkkı) çıkar.

Başka karşı örnekler de vardır: (3 + √5) ve (3 − √5) sayılarının ikisi de irrasyoneldir; toplamları **6**'dır ve rasyoneldir.

d) Çarpım için durum
Çarpmada da sonuç **duruma bağlıdır**.

İrrasyonel çıkan örnek:
√2 · √3 = √6 → 6 tam kare değil → **irrasyonel**

Rasyonel çıkan örnekler:
√2 · √2 = **2** → rasyonel
√8 · √2 = √16 = **4** → rasyonel
√12 · √3 = √36 = **6** → rasyonel

Demek ki çarpımda da "her zaman irrasyoneldir" denemez.

e) Çıkarılacak ders
"İki irrasyonel sayıyla yapılan işlemin sonucu rasyonel de olabilir irrasyonel de; **önce işlemi yapıp sonucu en sade hâline getirmek, sonra karar vermek** gerekir."

Pratik ölçüt: Sonucu sadeleştirdikten sonra hâlâ karekök kalıyorsa ve kök içi tam kare değilse sonuç irrasyoneldir; karekök kaybolmuşsa rasyoneldir.

a) 3√2, irrasyonel b) 0, rasyonel c) Haklı değil d) Çarpımda da duruma bağlı

13 **√28** sayısı aşağıdaki sayılarla ayrı ayrı çarpılıyor.

I. √2
II. √7
III. Payı 1, paydası √7 olan sayı
IV. √63
V. √14
VI. 2√7

a) √28 sayısını a√b biçiminde yazınız.
b) Her çarpımın sonucunu en sade hâliyle bulunuz.
c) Sonucu rasyonel olanlarla irrasyonel olanları ayırınız.
d) √28 sayısını rasyonel yapan çarpanlar için genel kuralı yazınız.

a) √28 sayısını sadeleştirelim
28 = **4** · 7
√28 = √(4 · 7) = **2√7**

Kök dışına çıkamayan çarpan: **√7**

b) Çarpımlar

I. 2√7 · √2 = 2√14 → 14 tam kare değil → **2√14** (≈ 7,48)

II. 2√7 · √7 = 2 · 7 = **14**

III. 2√7 · (1/√7) = 2 · (√7/√7) = 2 · 1 = **2**

IV. Önce √63 sadeleşir: √63 = √(9 · 7) = 3√7
2√7 · 3√7 = (2 · 3) · 7 = **42**

V. 2√7 · √14 = 2√98
√98 = √(49 · 2) = 7√2
2 · 7√2 = **14√2** (≈ 19,80)

VI. 2√7 · 2√7 = (2 · 2) · 7 = **28**

c) Sınıflandırma
Rasyonel olanlar: II (14), III (2), IV (42), VI (28)
İrrasyonel olanlar: I (2√14), V (14√2)

Dikkat edilirse rasyonel çıkanların hepsinde çarpan **√7 içeriyordu**; irrasyonel çıkanlarda ise kök içi 7'den farklıydı (2 ve 14).

d) Genel kural
√28 = 2√7 ifadesinin kök dışına çıkamayan çarpanı **√7**'dir.

"**k** sıfırdan farklı bir rasyonel sayı olmak üzere, 2√7 sayısı **k√7** biçimindeki her sayıyla çarpıldığında sonuç rasyonel olur."

Çünkü çarpımda √7 · √7 = 7 olur ve karekök işareti kaybolur:
2√7 · k√7 = 2k · 7 = **14k**

devamı →

13 *(çözümün devamı)*

Örneklerimizle doğrulayalım:
- II: k = 1 → 14 · 1 = 14 ✓
- III: k = 1/7 → 14 · (1/7) = 2 ✓
- IV: k = 3 → 14 · 3 = 42 ✓
- VI: k = 2 → 14 · 2 = 28 ✓

Dördü de kuralı sağlıyor. III. çarpan k'nın **kesirli** de olabileceğini gösteriyor.

a) 2√7 b) 2√14, 14, 2, 42, 14√2, 28 c) Rasyonel: II, III, IV, VI d) k√7 biçimindekiler

14 Kare biçiminde üç levhanın alanları sırasıyla **0,25 m²**, **1,96 m²** ve **5,76 m²**'dir.

a) Üç levhanın kenar uzunluklarını bulunuz.
b) Kenar uzunluklarının toplamı kaç metredir?
c) Üç levhanın çevreleri toplamı kaç metredir?
d) En büyük levhanın alanı, en küçüğünün kaç katıdır?
e) En büyük levhanın kenarı, en küçüğünün kaç katıdır? İki oranı karşılaştırınız.

a) Kenar uzunlukları
Karede kenar = √alan'dır.

1. levha: √0,25 = √(25/100) = 5/10 = **0,5 m**
2. levha: √1,96 = √(196/100) = 14/10 = **1,4 m**
3. levha: √5,76 = √(576/100) = 24/10 = **2,4 m**

Kontroller: 0,5 · 0,5 = 0,25 ✓ · 1,4 · 1,4 = 1,96 ✓ · 2,4 · 2,4 = 5,76 ✓

b) Kenar uzunluklarının toplamı
0,5 + 1,4 + 2,4 = **4,3 m**

c) Çevreler toplamı
Her karenin çevresi kenarının 4 katıdır.

Yol 1 — tek tek:
4 · 0,5 = 2 m
4 · 1,4 = 5,6 m
4 · 2,4 = 9,6 m
Toplam: 2 + 5,6 + 9,6 = **17,2 m**

Yol 2 — kısa yoldan:
4 · (0,5 + 1,4 + 2,4) = 4 · 4,3 = **17,2 m** ✓

İkinci yol daha kısadır; çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliğini kullanır.

devamı →

14 *(çözümün devamı)*

d) Alanlar arasındaki oran
En büyük alan: 5,76 m^2 · En küçük alan: 0,25 m^2

5,76 : 0,25 = ?

Bölmeyi kolaylaştırmak için ikisini de 100 ile çarpalım:
576 : 25 = **23,04**

En büyük levhanın alanı, en küçüğünün 23,04 katıdır.

e) Kenarlar arasındaki oran ve karşılaştırma
En büyük kenar: 2,4 m · En küçük kenar: 0,5 m

2,4 : 0,5 = 24 : 5 = **4,8**

En büyük levhanın kenarı, en küçüğünün 4,8 katıdır.

İki oranı karşılaştıralım:
Kenar oranı: **4,8**
Alan oranı: **23,04**

Aralarındaki bağıntıyı arayalım:
4,8 · 4,8 = **23,04** ✓

Alan oranı, kenar oranının karesidir.

Bu beklenen bir sonuçtur: Alan kenarın kendisiyle çarpımı olduğu için, kenar k katına çıkarsa alan k^2 katına çıkar.

a) 0,5 / 1,4 / 2,4 m b) 4,3 m c) 17,2 m d) 23,04 katı e) 4,8 katı; $4,8^2 = 23,04$

15 Aşağıdaki koşulların tamamını sağlayan bir **ondalık ifade** yazınız.

- Kareköklü **sonlu bir ondalık ifade** olmalıdır.
- Virgülden sonra **dört basamağı** olmalıdır.
- Kareköklü **0,1 ile 0,5 arasında** olmalıdır.

a) Sayınızı yazınız.
b) Kareköklünü adım adım bulunuz.
c) Üç koşulun da sağlandığını gösteriniz.
d) Kareköklün sonlu olması için virgülden sonraki basamak sayısı neden çift olmalıdır?
e) Aynı koşulları sağlayan başka iki sayı daha yazınız.

Bu soruda tek bir doğru cevap yoktur; koşulları sağlayan her sayı kabul edilir. Aşağıda örnek bir çözüm ve sayının nasıl bulunduğu verilmiştir.

Nasıl kurulur? Ters yönden gidelim. Kareköklü **0,1 ile 0,5 arasında**, virgülden sonra **iki** basamaklı bir sayı seçelim; karesini aldığımızda virgülden sonra dört basamaklı bir sayı elde ederiz.

Karekök olarak **0,25**'i seçelim.

a) Sayımız
0,25 · 0,25 = **0,0625**

b) Kareköklünü adım adım bulalım
0,0625 sayısında virgülden sonra **dört** basamak var; payda 10 000 olur:
0,0625 = **625/10 000**

Payın ve paydanın kareköklünü ayrı ayrı alalım:
√625 = **25** (25 · 25 = 625)
√10 000 = **100**

√0,0625 = 25/100 = **0,25**

c) Koşulların kontrolü
- **Kareköklü sonlu ondalık mı?** 0,25 sonlu bir ondalık ifadedir ✓
- **Virgülden sonra dört basamak var mı?** 0,**0625** → dört basamak ✓
- **Kareköklü 0,1 ile 0,5 arasında mı?** 0,1 < 0,25 < 0,5 ✓

Üç koşul da sağlandı.

d) Basamak sayısı neden çift olmalı?
Bir ondalık ifade kesre çevrildiğinde paydası **10, 100, 1000, 10 000, ...** olur. Virgülden sonraki basamak sayısı kadar sıfır bulunur.

devamı →

15 *(çözümün devamı)*

Karekök alınırken paydanın karekökü de alınır. Sonucun sonlu bir ondalık olması için paydanın karekökünün **tam sayı** çıkması, yani paydanın **tam kare** olması gerekir.

- 10 → tam kare değil ×
- 100 = 10^2 → tam kare ✓
- 1000 → tam kare değil ×
- 10 000 = 100^2 → tam kare ✓

Görüldüğü gibi yalnız **çift** sayıda sıfır içeren paydalar tam karedir. Bu yüzden virgülden sonraki basamak sayısı çift olmalıdır.

Not: Bu koşul gerekli ama tek başına yeterli değildir; paydaki sayının da tam kare olması gerekir. Örneğin 0,0020 sayısında dört basamak var ama pay (20) tam kare olmadığı için karekökü sonlu çıkmaz.

e) İki örnek daha

0,0144 → √0,0144 = √(144/10 000) = 12/100 = **0,12** ✓ (0,1 < 0,12 < 0,5)

0,1024 → √0,1024 = √(1024/10 000) = 32/100 = **0,32** ✓ (0,1 < 0,32 < 0,5)

Genel yöntem: 0,10 ile 0,50 arasında, virgülden sonra iki basamaklı herhangi bir sayı seç ve karesini al. Elde ettiğin sayı bütün koşulları sağlar.

Örnek: 0,0625 → √0,0625 = 0,25 · Başkaları: 0,0144 ve 0,1024