KONU ANLATIMI · CEVAPLI

Ondalık İfadelerin Kareköklerı ve Gerçek Sayılar

Kazanımlar: MAT.8.2. Ondalık ifadelerin kareköklerini belirleyebilme · MAT.8.2. Gerçek sayıları tanıyabilme; rasyonel ve irrasyonel sayıları ayırt edebilme

© Buse Hoca · Matematik Sınıfım (busehoca.com). Bu belge **CC BY-NC 4.0** lisanslıdır: ticari olmayan amaçlarla, kaynak gösterilerek çoğaltılabilir ve paylaşılabilir.

Ondalık İfadeleri Kesre Çevirme

Bir ondalık ifadeyi rasyonel sayıya (kesre) çevirirken iki adım izlenir:

1. adım: Kesir çizgisi çizilir ve **paya**, verilen ondalık ifade **virgül dikkate alınmadan** yazılır.

2. adım: Paydaya önce 1 yazılır. Sonra 1'in sağına, ondalık ifadenin virgülden sonraki **basamak sayısı kadar 0** yazılır.

Örnekler:
0,2 = **2/10** (bir basamak → bir sıfır)
0,04 = **4/100** (iki basamak → iki sıfır)
0,036 = **36/1000** (üç basamak → üç sıfır)
0,0384 = **384/10 000** (dört basamak → dört sıfır)

Bu dönüşüm, ondalık ifadelerin karekökünü bulmanın anahtarıdır.

Ondalık İfadelerin Kareköklerı

Bir ondalık ifadenin karekökü bulunurken ifade önce **rasyonel sayıya çevrilir**; sonra **payın ve paydanın karekökü ayrı ayrı** alınır.

Kullanılan kural şudur:
√(a/b) = √a / √b

Örnek:
√0,04 = √(4/100) = √4 / √100 = 2/10 = **0,2**

Kontrol: 0,2 · 0,2 = 0,04 ✓

Paydadaki sayı (10, 100, 1000, ...) tam kare ise karekökü bir doğal sayı olur ve sonuç **sonlu bir ondalık ifadedir**. Payda tam kare değilse sonuçta karekök kalır.



Bir ondalık ifadenin karekökünün hangi adımlarla bulunacağını gösteren akış şeması. İfade kesre çevrilir, payın ve paydanın karekökü ayrı ayrı alınır.

ÖRNEK **Kareköklerı bulalım.**

- **√0,09** = √(9/100) = 3/10 = **0,3**
- **√0,64** = √(64/100) = 8/10 = **0,8**
- **√1,44** = √(144/100) = 12/10 = **1,2**
- **√2,25** = √(225/100) = 15/10 = **1,5**
- **√0,0036** = √(36/10 000) = 6/100 = **0,06**
- **√0,0049** = √(49/10 000) = 7/100 = **0,07**
- **√6,25** = √(625/100) = 25/10 = **2,5**

Dikkat çeken örüntü: Sayının virgülden sonra **iki** basamağı varsa karekökünün **bir** basamağı olur; **dört** basamağı varsa karekökünün **iki** basamağı olur.

Sebebi şudur: Payda 100 = 10^2 ise karekökü 10'dur; payda 10 000 = 100^2 ise karekökü 100'dür.

NOT **Virgülden sonraki basamak sayısı TEK ise sonuç sonlu ondalık olmaz.**

Payda 10, 1000 gibi **tam kare olmayan** bir sayı olduğunda karekökü doğal sayı çıkmaz; paydayı doğal sayı yapmak gerekir.

Örnek: √0,4
√0,4 = √(4/10) = √4 / √10 = 2/√10

Paydayı doğal sayı yapalım: pay ve paydayı √10 ile çarpalım.
2√10 / 10 = **√10 / 5**

Yaklaşık değeri: √10 ≈ 3,16 olduğuna göre √0,4 ≈ 0,632

En sık yapılan hata: √0,4 = 0,2 demek. Kontrol edelim: 0,2 · 0,2 = **0,04**, 0,4 değil! O hâlde 0,2 sayısı 0,04'ün kareköküdür.

Hızlı kontrol: Bulduğun sayının karesini al; başlangıçtaki sayıyı vermiyorsa hata vardır.

İfade	Kesir Biçimi	Pay ve Paydanın Karekökü	Sonuç
√0,16	16/100	4 / 10	**0,4**
√0,81	81/100	9 / 10	**0,9**
√1,69	169/100	13 / 10	**1,3**
√0,0025	25/10 000	5 / 100	**0,05**
√0,000064	64/1 000 000	8 / 1000	**0,008**
√0,02	2/100	√2 / 10	**√2 bölü 10**
√0,0055	55/10 000	√55 / 100	**√55 bölü 100**

ÖRNEK **Katsayılı ifadeler ve dört işlem.**

Katsayılı ifadeler: Önce karekök bulunur, sonra katsayıyla çarpılır.
- $2\sqrt{0,01} = 2 \cdot 0,1 =$ **0,2**
- $3\sqrt{0,04} = 3 \cdot 0,2 =$ **0,6**
- $5\sqrt{0,0064} = 5 \cdot 0,08 =$ **0,4**

Toplama ve çıkarma: Her karekök ayrı ayrı bulunur, sonra işlem yapılır.
- $\sqrt{0,01} + \sqrt{0,25} = 0,1 + 0,5 =$ **0,6**
- $\sqrt{4,41} - \sqrt{3,61} = 2,1 - 1,9 =$ **0,2**
- $\sqrt{0,04} + \sqrt{1,96} - \sqrt{3,24} = 0,2 + 1,4 - 1,8 =$ **−0,2**
- $\sqrt{2,25} - \sqrt{1,44} - \sqrt{0,16} = 1,5 - 1,2 - 0,4 =$ **−0,1**

Son iki örnekte sonuç **negatif** çıktı. Bu bir hata değildir; çıkarılan sayılar toplamdan büyük olduğu için sonuç negatiftir.

ÖRNEK **Kare bölgelerde alandan kenara ve çevreye.**

Karede **alan = kenar · kenar** olduğuna göre **kenar = √alan**'dır.

Alanı 1,44 br² olan kare:
Kenar = $\sqrt{1,44} = 12/10 =$ **1,2 br**
Çevre = $4 \cdot 1,2 =$ **4,8 br**

Alanı 0,0169 br² olan kare:
Kenar = $\sqrt{0,0169} = \sqrt{(169/10\,000)} = 13/100 =$ **0,13 br**
Çevre = $4 \cdot 0,13 =$ **0,52 br**

Alanı 6,25 br² olan kare:
Kenar = $\sqrt{6,25} = 25/10 =$ **2,5 br**
Çevre = $4 \cdot 2,5 =$ **10 br**

Uyarı: Karekök sana **kenarı** verir. Çevre için ayrıca **4 ile çarpmak** gerekir; bu adımı atlamak sık yapılan bir hatadır.

ETKİNLİK 1 **Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.**

a) D 0,036 ondalık ifadesi 36/1000 kesrine eşittir.

b) D $\sqrt{0,04}$ ifadesinin değeri 0,2'dir.

c) Y $\sqrt{0,4}$ ifadesinin değeri 0,2'dir.

d) D Virgülden sonra iki basamağı olan bir ondalık ifadenin karekökü sonlu ise bir basamaklıdır.

e) D Alanı verilen bir karenin çevresi, alanın karekökünün 4 katıdır.

devamı →

ETKİNLİK 1 **Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.** (devam)

f) D Devirli ondalık ifadeler rasyonel sayıdır.

g) Y Kök içi tam kare olan kareköklü ifadeler irrasyoneldir.

h) D √13 sayısı bir irrasyonel sayıdır.

ı) Y π sayısı 22/7'ye eşittir.

i) D Her doğal sayı aynı zamanda bir gerçek sayıdır.

j) Y Her gerçek sayı aynı zamanda bir rasyonel sayıdır.

k) Y İki irrasyonel sayının toplamı her zaman irrasyoneldir.

ETKİNLİK 2 **Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.**

İfade	Kesir Biçimi	Pay ve Paydanın Karekökü	Sonuç
√0,09	9/100	3 / 10	0,3
√0,49	49/100	7 / 10	0,7
√1,21	121/100	11 / 10	1,1
√1,96	196/100	14 / 10	1,4
√0,0001	1/10 000	1 / 100	0,01
√0,0025	25/10 000	5 / 100	0,05
√0,02	2/100	√2 / 10	√2 bölü 10

ETKİNLİK 3 **Aşağıdaki işlemleri yapınız.**

a) √0,25 + √0,04 **0,5 + 0,2 = 0,7**

b) √1,44 − √0,81 **1,2 − 0,9 = 0,3**

c) √4,41 − √3,61 **2,1 − 1,9 = 0,2**

d) √0,04 + √1,96 − √3,24 **0,2 + 1,4 − 1,8 = −0,2**

e) √2,25 − √1,44 − √0,16 **1,5 − 1,2 − 0,4 = −0,1**

f) 2√0,01 **2 · 0,1 = 0,2**

g) 3√0,04 **3 · 0,2 = 0,6**

h) 5√0,0064 **5 · 0,08 = 0,4**

ı) Alanı 2,56 br² olan karenin çevresi **Kenar √2,56 = 1,6 br → çevre 4 · 1,6 = 6,4 br**

i) Alanı 0,09 br² olan karenin çevresi **Kenar 0,3 br → çevre 1,2 br**

Devirli Ondalık İfadeleri Rasyonel Sayıya Çevirme

Devirli ondalık ifadeler de **a/b** biçiminde yazılabildiği için birer **rasyonel sayıdır**.

Çevirme kuralı:

Paya: Virgül düşünülmeden **sayının tamamı** yazılır, ondan **devretmeyen kısım** çıkarılır.

Paydaya: Virgülden sonra **devreden basamak sayısı kadar 9**, ardından **devretmeyen basamak sayısı kadar 0** yazılır.

Örnek: $1,2\overline{7}$ sayısında devreden kısım **7**, devretmeyen kısım **2**'dir.
Sayının tamamı: **127** · Devretmeyen kısım: **12**
Bir devreden basamak → bir tane **9**; bir devretmeyen basamak → bir tane **0** → payda **90**

$1,2\overline{7} = (127 - 12)/90 = 115/90 =$ **23/18**



Devirli bir ondalık ifadenin rasyonel sayıya nasıl çevrileceğini gösteren akış şeması. Paya sayının tamamından devretmeyen kısım çıkarılarak, paydaya devreden basamak kadar 9 ve devretmeyen basamak kadar 0 yazılır.

Devirli Sayı	Sayının Tamamı	Devretmeyen Kısım	Payda	Sonuç
$0,\overline{6}$	6	0	9	6/9 = **2/3**
$0,\overline{4}$	4	0	9	**4/9**
$2,\overline{45}$	245	2	99	243/99 = **27/11**
$3,\overline{56}$	356	3	99	**353/99**
$1,2\overline{7}$	127	12	90	115/90 = **23/18**
$15,6\overline{1}$	1561	156	90	1405/90 = **281/18**
$0,4\overline{5}$	45	4	90	**41/90**

Tabloyu okuyalım. Paydanın nasıl kurulduğuna dikkat et:

- **$0,\overline{6}$** → bir devreden basamak, hiç devretmeyen basamak yok → payda **9**
- **$2,\overline{45}$** → iki devreden basamak, devretmeyen yok → payda **99**
- **$1,2\overline{7}$** → bir devreden, bir devretmeyen → payda **90**
- **$15,6\overline{1}$** → bir devreden, bir devretmeyen → payda **90**

Uyarı: Paydadaki basamak sayısı, virgülden sonraki toplam basamak sayısına eşittir. Tam kısımdaki rakamlar paydayı etkilemez; onlar yalnız payda görünür.

Kontrol yöntemi: Bulduğun kesirde payı paydaya böl; başlangıçtaki devirli sayıyı elde etmelisin. Örnek: 23/18 bölmesinde 230 : 18 → 12 (kalan 14), 140 : 18 → 7 (kalan 14), 140 : 18 → 7 (kalan 14)...
23/18 = 1,2777... = **$1,2\overline{7}$** ✓

ETKİNLİK 4 **Aşağıdaki devirli ondalık ifadeleri rasyonel sayıya çeviriniz ve sonucu en sade hâliyle yazınız.**

a) $0,\overline{6}$ **(6 − 0)/9 = 6/9 = 2/3**

b) $0,\overline{4}$ **4/9**

c) $1,\overline{3}$ **(13 − 1)/9 = 12/9 = 4/3**

d) $3,\overline{56}$ **(356 − 3)/99 = 353/99**

e) $0,\overline{27}$ **27/99 = 3/11**

f) $1,2\overline{7}$ **(127 − 12)/90 = 115/90 = 23/18**

g) $0,4\overline{5}$ **(45 − 4)/90 = 41/90**

h) $2,1\overline{6}$ **(216 − 21)/90 = 195/90 = 13/6**

ı) $15,6\overline{1}$ **(1561 − 156)/90 = 1405/90 = 281/18**

i) $5,\overline{12}$ **(512 − 5)/99 = 507/99 = 169/33**

Rasyonel ve İrrasyonel Sayılar

Doğal sayılar (N): 0, 1, 2, 3, ...

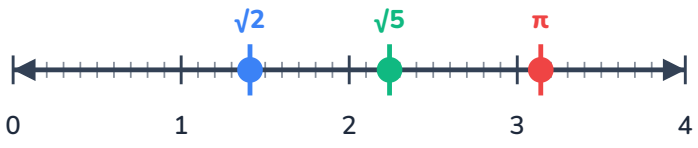
Tam sayılar (Z): ..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...

Rasyonel sayılar (Q): a ile b birer tam sayı ve b sıfırdan farklı olmak üzere **a/b** biçiminde yazılabilen sayılardır.
Ondalık ifadeler ve devirli ondalık ifadeler de a/b biçiminde yazılabildiği için **rasyoneldir**.

İrrasyonel sayılar (I): a/b biçiminde **yazılamayan** sayılardır. Ondalık açılımları **belirli bir düzende devam etmez**; ne sonlanır ne de devreder.

√5 = 2,2360679... · π = 3,14159265...

Kareköklü ifadelerde ölçüt: Kök içi **tam kare** ise sayı rasyoneldir (√9, √16 gibi); kök içi tam kare **değilse** sayı irrasyoneldir (√5, √12 gibi).



0 ile 4 arasındaki sayı doğrusunda üç irrasyonel sayının yaklaşık yerleri: √2, √5 ve π. Hiçbiri bölme noktalarının tam üzerine düşmez.

Sayı doğrusunu okuyalım. Üç irrasyonel sayının yaklaşık yerleri işaretlenmiştir:

- **√2 ≈ 1,41** → 1 ile 2 arasında
- **√5 ≈ 2,24** → 2 ile 3 arasında
- **π ≈ 3,14** → 3 ile 4 arasında

Üçü de hiçbir bölme noktasının **tam üzerine** düşmüyor. Aralıkları yüz, bin, hatta bir milyon eş parçaya bölsek bile bu böyle kalır; çünkü bu sayıların ondalık açılımı **hiç bitmez ve hiç devretmez**.

Devirli sayılarla farkı ne? 1/3 = 0,333... sayısının açılımı da bitmez; ama **belirli bir düzende** tekrar eder. Bu yüzden 1/3 rasyoneldir, √2 ise değildir.

Önemli: İrrasyonel sayılar da sayı doğrusu üzerinde **bir yere** karşılık gelir. Yazılamıyor olmaları, var olmadıkları anlamına gelmez.

NOT **π sayısı 22/7'ye eşit değildir.**

π sayısı irrasyoneldir; ondalık açılımı 3,14159265... biçiminde düzensiz sürer. İşlemlerde kolaylık olsun diye **3**, **3,14** ya da **22/7** değerleri kullanılır; ama bunlar yalnızca **yaklaşık değerlerdir**.

Farkı görelim:
π ≈ **3,141592**...
22/7 = **3,142857**...

Üçüncü ondalık basamakta ayrışıyorlar: biri 1, diğeri 2.

Ayrıca 22/7 sayısı iki tam sayının oranı olduğu için **rasyoneldir**; bölme yapıldığında devirli bir ondalık ifade verir: 22/7 = $3,\overline{142857}$

Bir irrasyonel sayı hiçbir zaman devirli bir ondalık ifadeye eşit olamaz. Bu yüzden π ile 22/7 **farklı sayılardır**.

ÖRNEK **Kareköklü ifadeleri sınıflandıralım.**

Rasyonel olanlar (kök içi tam kare):
- √9 = 3
- √16 = 4
- √81 = 9
- √25 = 5
- √(49/4) = 7/2 = 3,5

İrrasyonel olanlar (kök içi tam kare değil):
- √6 · √12 · √50 · √13

Dikkat gerektiren durumlar:
- **√8 / √2** = √(8/2) = √4 = **2** → rasyonel! (Tek tek bakınca ikisi de irrasyonel görünüyor.)
- **√24 / √6** = √4 = **2** → rasyonel

devamı →

ÖRNEK (devam)

• **√3 / 3** → paydası doğal sayı ama payda karekök var → **irrasyonel**

Kural: İfadeyi önce **en sade hâline** getir, sonra karar ver. Sadeleştirmeden verilen kararlar yanlış olabilir.

Gerçek Sayılar ve Kümeler Arası İlişki

Gerçek sayılar (R): Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin **birleşimidir**.

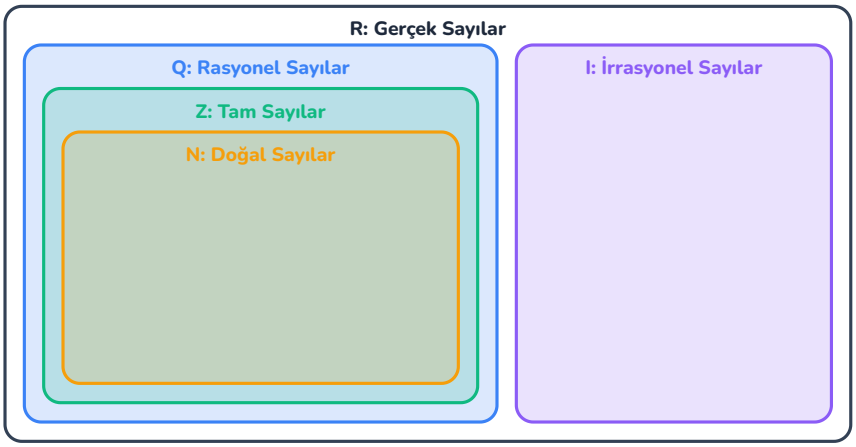
R = Q ∪ I

Kümeler arasındaki kapsama ilişkisi şöyledir:
N ⊂ Z ⊂ Q ⊂ R

Yani:
• Her doğal sayı aynı zamanda bir tam sayıdır.
• Her tam sayı aynı zamanda bir rasyonel sayıdır.
• Her rasyonel sayı aynı zamanda bir gerçek sayıdır.

İrrasyonel sayılar ise rasyonel sayılarla **hiç kesişmez**; ama ikisi birlikte gerçek sayıları oluşturur.

Bir sayı aynı anda hem rasyonel hem irrasyonel **olamaz**.



Sayı kümeleri arasındaki kapsama ilişkisi. Gerçek sayılar kümesinin içinde rasyonel sayılar, onun içinde tam sayılar, onun içinde doğal sayılar bulunur. İrrasyonel sayılar rasyonel sayılarla kesişmeyen ayrı bir bölgededir.

Sayı	N	Z	Q	I	R
√25 = 5	✔	✔	✔	—	✔
√8 / √2 = 2	✔	✔	✔	—	✔
−3	—	✔	✔	—	✔
$0,\overline{4}$ = 4/9	—	—	✔	—	✔
3,9	—	—	✔	—	✔
√13	—	—	—	✔	✔
π	—	—	—	✔	✔

Tabloyu okuyalım. En sağdaki sütuna dikkat: **bütün satırlarda** işaret var.

Bunun sebebi şudur: **Her sayı bir gerçek sayıdır.** Rasyonel de olsa irrasyonel de olsa, hepsi R kümesinin elemanıdır.

İkinci satır ilginçtir: **√8 / √2** ifadesinde hem payda hem paydada irrasyonel sayı var; ama sadeleştirildiğinde sonuç **2** çıkıyor ve bu bir **doğal sayıdır**.

Q ve I sütunlarına bakalım: Hiçbir satırda ikisinde birden işaret yok. Bir sayı ya rasyoneldir ya irrasyoneldir; ikisi birden olamaz.

Soldan sağa okuma: Bir satırda N sütununda işaret varsa Z, Q ve R sütunlarında da mutlaka vardır. Bu, kapsama ilişkisinin (N ⊂ Z ⊂ Q ⊂ R) tablodaki görünümüdür.

NOT **İki irrasyonel sayıyla yapılan işlemin sonucu rasyonel olabilir.**

"İrrasyonel + irrasyonel = irrasyonel" gibi bir kural **yoktur**. Sonuç duruma göre değişir.

Toplamada:
- √2 + √8 = √2 + 2√2 = **3√2** → irrasyonel
- √2 + (−√2) = **0** → rasyonel!

Çarpmada:
- √2 · √3 = **√6** → irrasyonel
- √2 · √2 = **2** → rasyonel!
- √8 · √2 = √16 = **4** → rasyonel!

Bölmede:
- √6 / √2 = **√3** → irrasyonel
- √8 / √2 = **2** → rasyonel!

Kural: İşlemi yap, sonucu **en sade hâline** getir, ondan sonra karar ver. Baştan tahmin yürütmek yanıltıcıdır.

ETKİNLİK 5 **Aşağıdaki sayıların rasyonel mi irrasyonel mi olduğunu gerekçesiyle yazınız.**

a) √81 **81 tam kare → √81 = 9 → rasyonel**

b) √6 **6 tam kare değil → irrasyonel**

c) √3 / 3 **Payda karekök kaldı → irrasyonel**

d) √8 / √4 **√(8/4) = √2 → irrasyonel**

e) √24 / √6 **√4 = 2 → rasyonel (üstelik doğal sayı)**

f) $0,\overline{1}$ **1/9 biçiminde yazılabilir → rasyonel**

g) π **Açılımı düzensiz sürer, a/b yazılamaz → irrasyonel**

h) 3,9 **39/10 biçiminde yazılabilir → rasyonel**

ı) √50 **50 tam kare değil (5√2) → irrasyonel**

i) √2 · √8 **√16 = 4 → rasyonel**